Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Giugno 2024

Esercizio 1
Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa unitaria sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad r(z) = \begin{cases} 1 + \frac{\log(1+z^4)}{z^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2

i) Si consideri la relazione

$$\boldsymbol{P} = A\boldsymbol{p} + A^t\boldsymbol{q}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che coinvolge i vettori $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Si può estendere tale relazione ad una trasformazione canonica lineare $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

ii) Data la relazione

$$\boldsymbol{P} = A\boldsymbol{p} + B\boldsymbol{q},$$

con A, B matrici reali invertibili di ordine n, quale proprietà devono soddisfare A e B affinché tale relazione si possa estendere ad una trasformazione canonica lineare $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

iii) Siano A, B, C matrici reali invertibili di ordine n. Assumiamo che A e CB^t siano simmetriche e che $(C - B)A = I$. Si trovino le soluzioni del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) \cdot A(B\boldsymbol{p} + C\boldsymbol{q})$$

con condizioni iniziali $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{0}$.

Esercizio 3.
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega(I_1 + I_2) + \varepsilon\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\varphi_2\big]$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile trovando due integrali primi indipendenti e in involuzione.

ii) Trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano associato ad H_ε e dire se tale sistema soddisfa il principio della media.

iii) Si consideri adesso la funzione di Hamilton

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon + \varepsilon I_2 \cos\varphi_2.$$

Scrivere la forma normale risonante di K_ε relativa al multi-indice risonante $k^* = (1, -1)$, al primo ordine in ε.