Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Novembre 2023

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{z} = -\frac{1}{2},$$

di un punto materiale di massa unitaria che si muove in un piano con coordinate (x, z) soggetto ad una forza di intensità costante.

1. Determinare la soluzione di tale equazione con condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

2. Mostrare che la funzione $\bar{u}(x) = z(x)$ ottenuta dalla soluzione del punto precedente è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(u, u') = \sqrt{1-u}\,\sqrt{1+u'^2}$$

con $u' = \frac{du}{dx}$.

3. Mostrare che $\bar{u}(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$. *Suggerimento*: cercare la soluzione dell'equazione di Jacobi in forma polinomiale.

Esercizio 2

1. Si completi la relazione

$$Q = e^q$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \overset{\Psi}{\mapsto} (P, Q)$$

tramite il metodo della funzione generatrice.

2. Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con funzione di Hamilton
$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 e^{-2q} + p$$
e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$
$$p_0 = 1, \qquad q_0 = 0$$
considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica $\mathbf{\Psi}$.

3. Fissato un tempo $\tau > 0$ si verifichi che si ha
$$K(\mathbf{\Phi}^\tau(P,Q)) = K(P,Q),$$
dove $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ e $\mathbf{\Phi}^t(P,Q)$ è il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano X_K.