Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
16 Gennaio 2024

Esercizio 1
Si considerino le funzioni

$$\zeta_1(t) = e^{-t/2}\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big),$$
$$\zeta_2(t) = e^{-t/2}\Big(A\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + B\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big)\Big),$$

con $A, B \in \mathbb{R}, A \neq 0$.

Usando il teorema di oscillazione di Sturm, mostrare che tra due zeri consecutivi di ζ_1 esiste un unico zero di ζ_2, e viceversa.

Esercizio 2 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$(p, q) \overset{\Psi}{\mapsto} (P, Q)$$

con

$$P = \frac{q^2 p}{1 - qp}, \qquad Q = \frac{(1 - qp)^2}{q^2 p},$$

e $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $pq \neq 0, 1$.

i) Verificare che la trasformazione è canonica univalente.

ii) Dopo aver mostrato che
$$q^2 p = QP^2,$$
utilizzare questo risultato per determinare la trasformazione inversa della trasformazione data.

iii) Trovare una funzione generatrice $S(q, P)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \varepsilon q^4,$$

con $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\omega > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

i) Trovare una trasformazione canonica

$$(p,q) \overset{\Psi_\varepsilon}{\mapsto} (I,\varphi)$$

con $I \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$ tale che la hamiltoniana $K_\varepsilon(I,\varphi) = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}(I,\varphi)$ assuma la forma

$$K_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi).$$

ii) Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \overset{\tilde{\Psi}_\varepsilon}{\mapsto} (\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{K}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = K_\varepsilon \circ \tilde{\Psi}_\varepsilon^{-1}(\tilde{I},\tilde{\varphi})$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.