Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
Laurea Magistrale in Matematica
5 Luglio 2024

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{q} - q,$$

con $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\dot q \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.

ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \qquad \dot\gamma_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0,+\infty)$.

iii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

iv) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_2(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_2(0) = -2, \qquad \dot\gamma_2(0) = 0.$$

Mostrare che γ_2 è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica.

v) Mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che la soluzione $\gamma_2(t)$ non è un minimo debole per il funzionale definito in (1) nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right) + q_1^2 + q_2^2,$$

con $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1,q_2) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^2$.

i) Estendere le relazioni

$$P_1 = \frac{p_1}{q_1}, \qquad P_2 = \frac{p_2}{q_2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

sul dominio di H. Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $q_1(0) = q_2(0) = \sqrt{2}$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon \left[\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)\right]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Determinare quali condizioni devono essere soddisfatte da ω_1, ω_2, ω_3 affichè valga il principio della media.