Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
9 Febbraio 2024

Esercizio 1

i) Mostrare che la funzione $y(x) = \cosh x$ è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(y(x), y'(x))dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(y, y') = y\,\sqrt{1 + y'^2}$$

con $y' = \frac{dy}{dx}$.

ii) Mostrare che $y(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si completino le relazioni

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - p_2 - q_1 - q_2 \\ Q_1 &= p_1 + p_2 + q_1 - q_2 \end{aligned}$$

ad una trasformazione canonica lineare

$$\mathbb{R}^4 \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Esercizio 3
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right) - \cos(q_1^2 - q_2^2),$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Si mostri che la trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

ottenuta completanto la trasformazione puntuale

$$Q_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2),$$
$$Q_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

rende separabili le nuove coordinate Q_1, Q_2 nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare la soluzione per $t \geq 0$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1$.