COMPITINO DI ANALISI II PER STUDENTI DI FISICA

Esercizio 1
Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[1 - \sin\big(\arctan(nx)\big)\Big]^{\alpha}.$$

Si dica in quali intervalli la serie converge uniformemente.

Esercizio 2 Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2-4} - 1}{y^4 - x^2 + x^4}.$$

Si studino il dominio, le eventuali simmetrie, i segni ed il comportamento limite della funzione agli estremi del dominio.

Si provi inoltre che

- non esistono punti critici sull'asse y;
- esistono punti critici sull'asse x con $|x| < 1$;
- non esistono punti critici con $f < 0$;
- i punti critici sull'asse x con $|x| < 1$ non sono di minimo (*suggerimento*: si studi il segno di $\frac{\partial f}{\partial y}$ vicino a quei punti);
- esistono almeno 4 punti di minimo relativo.

Esercizio 3 Si dimostri che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione $C^1(\mathbb{R}^2)$ e se

$$\exists \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2 - 2}$$

allora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

Date: 13 Marzo 2001.