Compitino di Analisi I per studenti di Fisica
14/01/2002

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{e^{x^2-x} - x}\right) \ .$$

In particolare

1. individuarne il dominio di definizione $\mathcal{D}$;
2. studiarne le proprietà di monotonia;
3. studiarne la derivabilità in $\mathcal{D}$;
4. studiare l'esistenza di massimi e minimi della funzione;
5. tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni:

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right);$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(nx^2+1)} \ .$$

Esercizio 3 Determinare al variare del parametro reale α la parte principale e l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \alpha \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 1 + \cos x \ .$$

Esercizio 4 (*facoltativo*) Dati $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$, sia $f \in C^\infty([a,b];\mathbb{R})$ tale che $f'''(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$,

$$\begin{cases} f(a) < 0 \\ f'(a) < 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(b) > 0 \\ f'(b) > 0 \\ f''(b) > 0 \ . \end{cases}$$

Dimostrare che esiste un unico punto $\overline{x} \in [a,b]$ tale che $f(\overline{x}) = 0$.