Compitino di Analisi I per studenti di Fisica
7 Dicembre 2001

Esercizio 1

a) Data la successione

$$(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^\alpha \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

al variare di α in $\mathbb{R}$, si studi l'esistenza del massimo e del minimo dell'insieme

$$E_\alpha = \{a_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Per quali α la successione $(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente?

b) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log(n!n^n)}{n^2 \log\left(\frac{n^3}{n^2+7}\right)}$$

c) Calcolare il seguente limite al variare del parametro α in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/(\sin^2(|x|^\alpha))}$$

Esercizio 2

a) Al variare di a in $\mathbb{R}$ si studi per quali x in $\mathbb{R}$ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2+1} \left(\mathrm{arctg}(nx)\right)^n$$

b) Al variare di x e y in $\mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin\left(\frac{x^2}{n+x^2}\right) - \frac{ny}{n^2+1}\right)$$

Esercizio 3

Si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

aventi le due seguenti proprietà:

1. $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$
2. per ogni coppia di successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ in $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e tali che esista finito e non nullo il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ risulta che esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{f(b_n)}$.

Si mostri che la funzione $f(x) = \dfrac{(x+1)}{7x^\alpha + 1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ appartiene ad $\mathcal{F}$.

Si trovi una funzione f tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ed $f \notin \mathcal{F}$.