Prova Scritta di Analisi Matematica III

Corso di Laurea in Fisica

Pisa, 4 luglio 2003

1) Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il momento di inerzia I_α del solido omogeneo $\mathcal{D}$ di densità unitaria definito da

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq f_\alpha(z); -1 \leq z \leq 1\}$$

dove

$$f_\alpha(z) := \begin{cases} |z|^\alpha & -1 \leq z \leq 0 \\ z^{1/\alpha} & 0 \leq z \leq 1 \end{cases} .$$

Determinare inoltre $\sup_{\alpha>0} I_\alpha$ e $\inf_{\alpha>0} I_\alpha$ e dire se tali valori sono raggiunti per qualche valore di α.

2) Trovare i massimi ed i minimi della funzione

$$f(x, y, z) := x^2 y^2 z^2$$

ristretta al vincolo definito dall'intersezione dei due insiemi seguenti:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - z^2 = 0\}\,; \qquad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\ .$$

3) Si studi la funzione di due variabili reali

$$f(x, y) := x^{yx^y}\ .$$

In particolare si individuino i suoi punti critici e si studi la loro natura.