I Compitino di Analisi Matematica III

Corso di Laurea in Fisica

Pisa, 4 novembre 2002

1) Si studi la funzione f definita da

$$f(x,y) := \frac{\ln(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2+1}. \qquad \textit{(8 punti)}$$

2) Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x,y) := \left(\frac{y^q}{(x^2+y^2)^p}, \frac{x^q}{(x^2+y^2)^p}\right),$$

dove p e q sono numeri reali. Si trovino tutte le coppie (p,q) in $\mathbb{R}^2$ tali che il campo F risulti conservativo.

Per queste coppie, si calcoli il lavoro del campo F lungo la curva $\gamma : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$\gamma(t) := \left(\frac{\cos(2\pi\, t)}{t}, \frac{\sin(2\pi\, t)}{t}\right). \qquad \textit{(10 punti)}$$

3) Si studi la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{e} - e^{-\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{3}{2}}}{x^2+2y^2-1}\ .$$

In particolare:

1. si studino l'insieme di definizione, i segni, le simmetrie ed i limiti; si trovino inoltre informazioni qualitative sull'esistenza di punti di massimo e di minimo;
2. si valuti per difetto il numero dei punti stazionari e si trovino informazioni sulla loro posizione;
3. si trovino altre eventuali informazioni sui punti stazionari, sui punti di massimo e di minimo.

(12 punti)