**Prova Scritta di Analisi Matematica III**

*Corso di Laurea in Fisica*

Pisa, 10 gennaio 2003

**1)** Sia $\gamma$ una curva chiusa in $\mathbb{R}^2$ il cui sostegno è l'insieme $\{(x,y) : |x| + |y| = 1\}$ percorso una sola volta in senso antiorario. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(r) := \operatorname{arctg}(e^{\sin r})$. Si calcoli il lavoro lungo $\gamma$ del campo $F = F_1 + F_2$ dove

$$F_1(x,y) := \Big(f(x^2+y^2)\,x, f(x^2+y^2)\,y\Big)$$
$$F_2(x,y) := \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\Big). \qquad \textit{(8 punti)}$$

**2)** Sia dato l'integrale

$$\int_D \Big((\alpha-1)\sin y\,(2y-y^3) + (\alpha y)^2\cos y\Big)\,|x|^{-\alpha^2+\alpha}(\sin|x|)^{\alpha-1}.$$

*A)* Si dica per quali valori reali di $\alpha$ l'integrale ha valore finito nel caso in cui $D$ sia un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente l'origine e contenuto nella palla unitaria.
*B)* Si calcoli esplicitamente l'integrale per $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ nel caso in cui sia

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < |x|\big\}. \qquad \textit{(10 punti)}$$

**3)** Si studi la funzione

$$f(x,y) := \frac{x^2+2y^2}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}.$$

In particolare:

1. si studino il dominio, i segni, le simmetrie di $f$ ed i suoi limiti nei punti estremi del dominio;
2. si dica se esistono massimi e minimi assoluti per $f$;
3. si studino i punti stazionari di $f$ e si individuino tra di essi gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti;
4. si studino gli eventuali punti stazionari che non siano di massimo né di minimo assoluto.

*(12 punti)*