Meccanica Razionale e Analitica

20/9/05

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 + 2xy)dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 1,\ y'(1) = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale è fissato il riferimento cartesiano ortogonale Oxy con asse y verticale discendente e versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Un disco omogeneo di massa M e raggio R ha il diametro AB vincolato a scorrere su un' asta liscia di massa trascurabile e versore $\mathbf{r}$ libera di ruotare nel piano verticale attorno a un suo punto fisso O (vedi Figura 1). Il centro C del disco è inoltre attratto da una molla di costante elastica K verso un punto fisso D posto sull'asse Ox di coordinate $(d, 0)$. Si assumano come parametri lagrangiani del sistema l'angolo θ formato dai versori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{i}$ e la distanza con segno s di C da O.

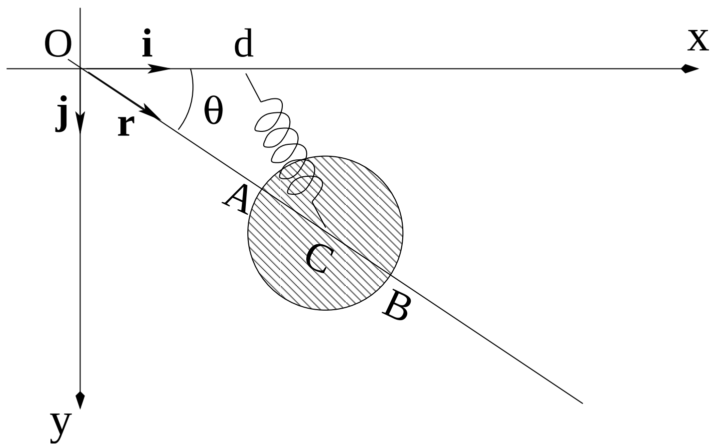

Figura 1

(1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
(2) Trovare le equazioni di Lagrange.
(3) Ritrovare le equazioni di moto tramite le equazioni cardinali.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si consideri il sistema meccanico costituito da tre corpi puntiformi A, B e C di uguale massa m, vincolati da due sbarrette di massa trascurabile e di ugual lunghezza ℓ che collegano rispettivamente le coppie di punti $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$. I corpi A e C sono inoltre vincolati a muoversi lungo una guida rettilinea, inclinata di un angolo costante $\alpha \in]0, \pi/2[$ rispetto alla direzione orizzontale (vedi Figura 2) e su A agisce una forza elastica attrattiva di costante $k > 0$ centrata in un punto O della guida (si consiglia di assumere O come origine del sistema di riferimento). Tutti i vincoli sono lisci.

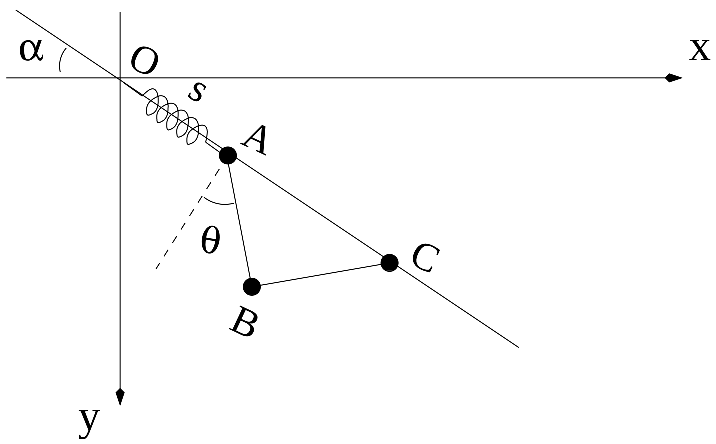

Figura 2

(1) Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del corpo A lungo la guida, con origine in O, e l'angolo θ (supposto crescente in verso antiorario) che il segmento AB forma con la direzione normale alla guida scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;

(2) calcolare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

(3) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Prova al Calcolatore

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2K}{M}x = 0$$

$$x(0) = x_0, \ \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

(b) Tracciare il grafico della curva

$$x = \frac{3}{2}(cos(t))^3, \ y = 3(sin(t))^3, \ t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne la lunghezza.