Meccanica Razionale e Analitica
21/2/06
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$\int_0^1 y^2 dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]), y''(x) - y(x) = 1\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale è fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy con l'asse Ox orizzontale e l'asse Oy orientato verso il basso. Nel punto $O = (0,0)$ e nel punto $Q = (2l, 0)$ sono incernierate due aste OA e QB di massa trascurabile e di egual lunghezza l libere di muoversi nel piano verticale. Un'asta pesante e omogenea di lunghezza $2l$ e massa M è libera di muoversi nel piano con gli estremi sempre coincidenti con i punti A, B. Inoltre un punto P di massa m è vincolato a muoversi sull'asta AB. Nel punto P è applicata una forza elastica di costante $k > 0$ diretta verso il baricentro G dell'asta AB (vedi Figura 1).

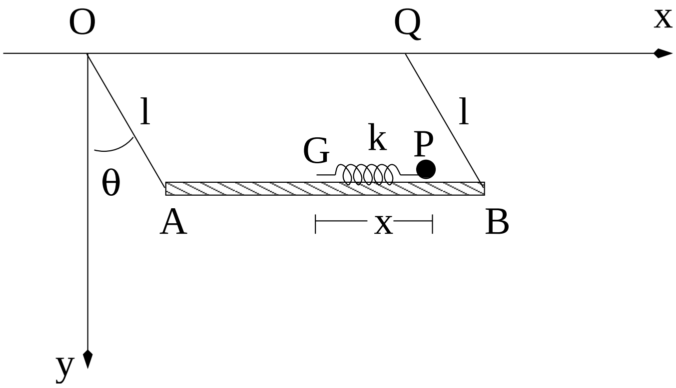

Figura 1

Supposti tutti i vincoli lisci ed assunti come parametri lagrangiani l'angolo θ che l'asta OA forma con la verticale discendente ($0 \le \theta < 2\pi$) e la distanza con segno x di P da G, calcolare: la quantità di moto totale $\mathbf{Q}$ del sistema, il momento della quantità di moto $\mathbf{K}_O$ rispetto al punto O, la lagrangiana del sistema e la hamiltoniana (in funzione delle variabili $x,\ \theta,\ p_x$ e p_θ). Trovare inoltre le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità. Infine calcolare le equazioni di moto linearizzate in corrispondenza della posizione di equilibrio stabile.

Terzo Esercizio

In un piano verticale in cui è fissato un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale e orientato verso il basso si consideri il sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ vincolata per un estremo al baricentro G del disco. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Il baricentro del disco è inoltre soggetto a due forze elastiche esercitate da due molle di uguale costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, con i secondi estremi fissati a pareti opposte rispetto alla posizione del disco e ad altezza uguale a quella del baricentro G (vedi figura). Per semplicità si può assumere che l'origine O sia equidistante dalle due pareti.

Denotiamo con B il baricentro dell'asta ed utilizziamo le coordinate lagrangiane s, ϕ, dove s è l'ascissa del punto del disco P a contatto con l'asse x e ϕ è l'angolo tra l'asta e la verticale, supposto crescente in senso antiorario.

(a) Scrivere la lagrangiana del sistema ed individuare le configurazioni di equilibrio.

(b) Dimostrare che la configurazione $(s, \phi) = (0, 0)$ è stabile e calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno tale posizione assumendo che valgano le relazioni $M = 2m\,; mg = k\ell$.

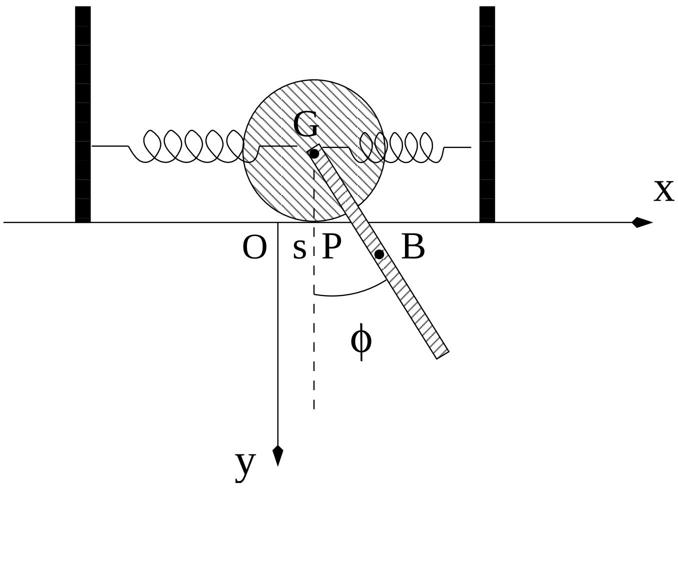

Figura 2