Meccanica Razionale e Analitica
23/01/06
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 y''^2 dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0,$$
$$y'(1) = 1,\ \int_0^1 y(x)dx = 0,\ \int_0^1 xy(x)dx = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

Una lamina rettangolare, sottile e omogenea $ABCD$ di lati a e b e massa m è libera di ruotare attorno al punto fisso O intersezione delle diagonali. La velocità angolare di corpo rigido della lamina è un vettore costante nel tempo di modulo ω e con la direzione e il verso del vettore AC (A e C vertici opposti della lamina). Calcolare il momento rispetto al punto O delle forze attive esterne che causano questo moto. Trovare in quali casi tale momento è nullo.

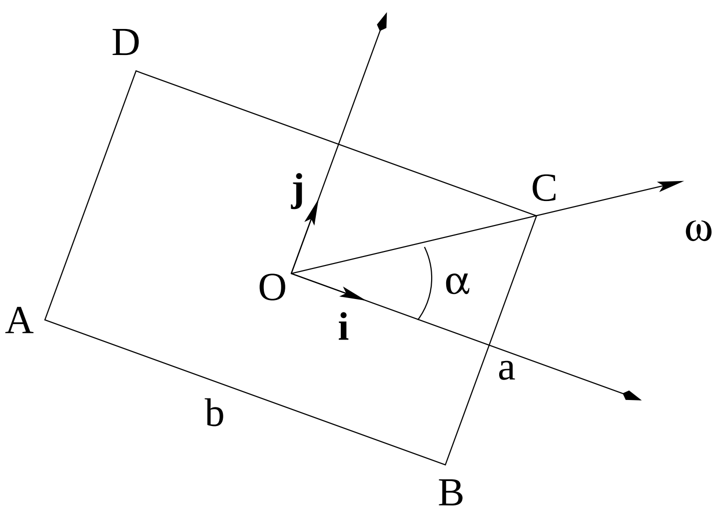

Figura 1

Terzo Esercizio

Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ vincolato a muoversi sulla superficie di un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{con } a, c > 0.$$

Sul punto non agiscono forze attive (moto geodetico). Utilizzando le coordinate lagrangiane θ, ϕ che danno luogo alla seguente parametrizzazione dell'ellissoide

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\phi \\ y = a\sin\theta\cos\phi \\ z = c\sin\phi \end{cases} \qquad \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, \;\; \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$$

(i) si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange;
(ii) per un dato valore γ del momento coniugato alla variabile (ciclica) θ si scriva la lagrangiana ridotta utilizzando il metodo di Routh;
(iii) si dimostri che per $\phi(0) = \dot\phi(0) = 0$ c'è un'orbita periodica del sistema completo di equazioni di Lagrange, determinato al punto (i), per ogni scelta delle condizioni iniziali $\theta(0), \dot\theta(0)$; in corrispondenza di tali condizioni iniziali trovare la legge oraria per la coordinata θ.