Meccanica Razionale e Analitica
3/6/05
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

In un piano verticale è fissato il riferimento cartesiano ortogonale Oxy con asse y verticale ascendente e versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Un'asta omogenea e pesante AB di massa m e lunghezza 2ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. In ciascun estremo dell'asta è applicata una forza elastica di centro sull'asse y, di egual costante k e che si mantiene sempre parallela all'asse x. Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa x_G del baricentro G dell'asta e l'angolo ϕ che AB forma con $-mg\mathbf{j}$.

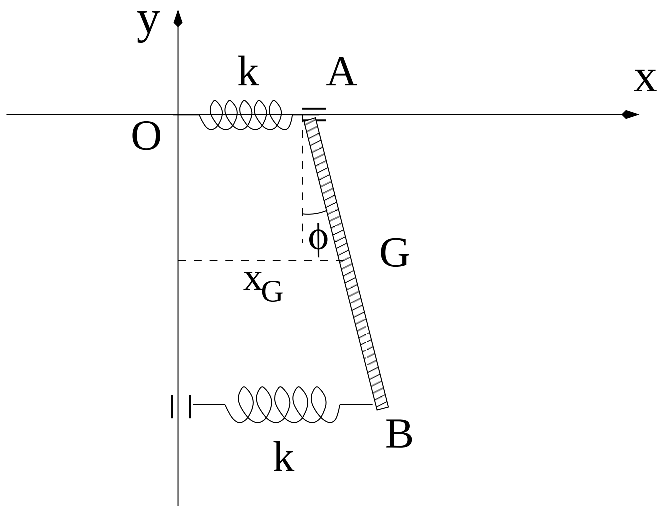

Figura 1

(1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e trovare quelle che sono stabili al variare del parametro $\frac{mg}{2k\ell} \neq 1$.
(2) Trovare la lagrangiana del sistema.
(3) Trovare $x_G(t)$ in corrispondenza delle condizioni iniziali

$$x_G(0) = x_0, \ \frac{dx_G}{dt}(0) = 0 \ .$$

Secondo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 y''^2 dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 0,\ y'(1) = 0, \int_0^1 y(x)dx = 1\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da due punti P, Q di uguale massa m vincolati a muoversi in un piano verticale su delle guide circolari concentriche di raggi r, R e centro O. I due punti sono inoltre collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

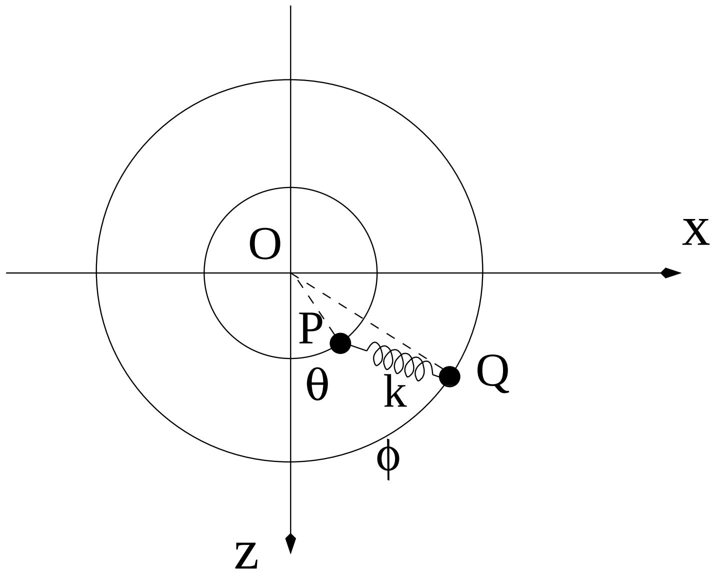

Figura 2

(a) Scrivere la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate θ, ϕ descritte in figura, definite come gli angoli che i segmenti OP ed OQ formano con la direzione verticale.

(b) Verificare che $(\theta, \phi) = (0, 0)$ è una posizione di equilibrio stabile e, assumendo che $R = 2r$ e $mg = kr$, calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a tale equilibrio.

Prova al Calcolatore

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2K}{M}x = 0$$

$$x(0) = x_0,\ \frac{dx}{dt}(0) = 0\ .$$

(b) Tracciare il grafico della curva

$$x = \frac{3}{2}(\cos t)^3,\ y = 3(\sin t)^3,\ t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne la lunghezza.