**Meccanica Razionale e Analitica**
**Seconda Prova in "Itinere"**
24/05/05
**USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI**

## Primo Esercizio

Un piano verticale in cui è fissato il riferimento cartesiano ortogonale $Oxy$ ruota intorno all'asse $Oy$ verticale ascendente con velocità angolare costante $\omega$. Un'asta pesante omogenea $AB$ è libera di muoversi nel piano con l'estremo $A$ sempre coincidente con $O$. Una seconda asta $CD$, anch'essa giacente nel piano mobile, ha l'estremo $C$ sempre coincidente con $B$ mentre l'estremo $D$ è vincolato a muoversi sull'asse $Ox$ (vedi Figura 1). Le aste sono pesanti, hanno entrambe massa $m$ e la stessa lunghezza $l$. Tutti i vincoli si suppongono privi di attrito. Assunto come parametro lagrangiano l'angolo $\phi$, $-\pi \leq \phi < \pi$, che l'asta $AB$ forma con l'asse $Oy$
(1) trovare al variare del parametro $\mu = \frac{3g}{8l\omega^2}$ le posizioni di equilibrio relativo del sistema e determinare quelle che sono stabili.
(2) Provare che nel riferimento del piano ruotante vale l'integrale primo dell'energia e da questo trovare l'equazione di moto del sistema.
(3) Determinare l'hamiltoniana.

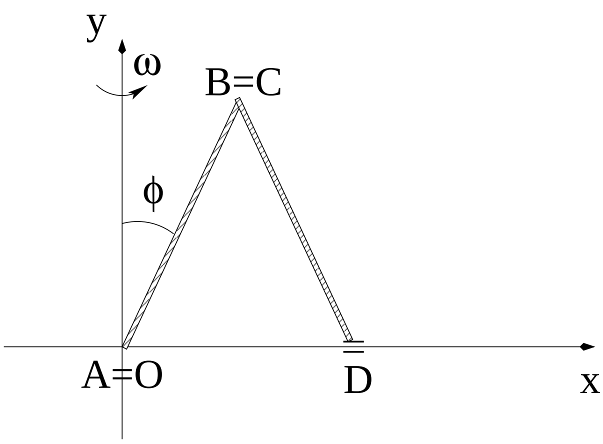


Figura 1

## Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali $P_1, P_2$, di uguale massa $m$, che si muovono in un piano orizzontale. I due punti sono inoltre vincolati a muoversi su due guide paraboliche, di equazioni $y = 1 + x^2/2, y = -1 - x^2/2$ rispettivamente, e tra di essi agisce una forza elastica di costante $k > 0$ (vedi Figura 2).

$(a)$ Scrivere la lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse $x_1, x_2$ dei due punti ed individuare le configurazioni di equilibrio;

$(b)$ calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e determinare i modi normali di oscillazione.

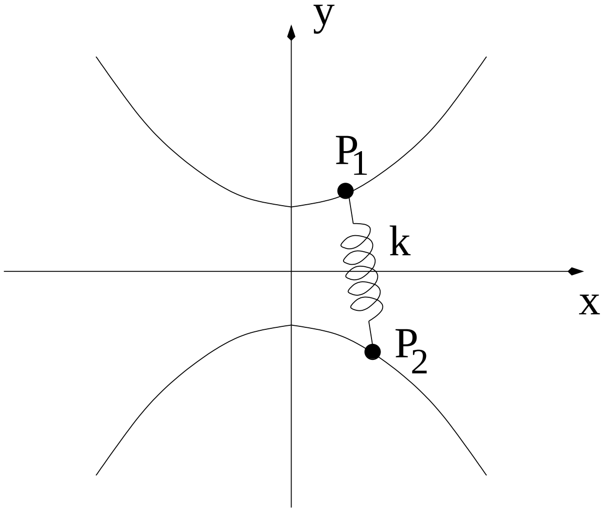


Figura 2

**Prova al Calcolatore**

$(a)$ Indicata con $H(m, l, g, \omega, \phi, p)$ l'hamiltoniana del punto (3) del primo esercizio tracciare in un piano cartesiano $\phi,\ p$ le curve di livello

$$H(1, 1, 1, 3/8, \phi, p) = 1/2,\ H(1, 1, 1, 3/8, \phi, p) = 1,$$

$$H(1, 1, 1, 3/8, \phi, p) = 3/2,$$

$$H(1, 1, 1, 3/8, \phi, p) = -4,\ H(1, 1, 1, 3/8, \phi, p) = -1$$

per $\phi \in (-\pi, \pi)$, $p \in (-5, 5)$. Usare l'opzione $grid = [200, 200]$

$(b)$ Considerare la superfice di equazioni parametriche

$$x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = u^2.$$

Calcolare l'area di questa superfice relativa al dominio di base

$$0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2\pi\ .$$