ESERCIZIO 1. *Si scrivano le equazioni del moto del sistema piano costituito da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ descritto in figura 1. L'estremo C dell'asta è vincolato a muoversi sull'asse x, l'altro estremo A è collegato all'asse y tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che si può muovere mantenendosi sempre parallela all'asse x. Si usino come coordinate l'ascissa s dell'estremo C dell'asta e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale (vedi figura) supposto crescente in senso antiorario.*

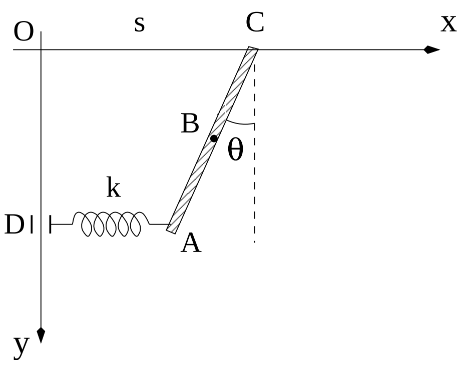

Figura 1:

EQUAZIONI CARDINALI

Il problema ha due gradi di libertà: cerchiamo due equazioni *pure* (cioè equazioni in cui non compaiono reazioni vincolari) che siano indipendenti.

Scriviamo la 2^a equazione cardinale per l'asta rispetto al polo C:

$$\dot{\mathbf{M}}_C = -\mathbf{v}_C \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_C$$

in cui il punto B corrisponde al baricentro dell'asta.

Consideriamo un sistema di riferimento $Oxyz$ formato da una terna levogira con gli assi x, y come in figura. Le coordinate della posizione e della velocità del baricentro B in tale riferimento sono

$$\begin{cases} x_B = s + \ell\,\sin\theta \\ y_B = \ell\,\cos\theta \\ z_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_B = \dot{s} + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_B = -\ell\,\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{z}_B = 0 \end{cases}$$

Il momento angolare dell'asta rispetto al polo C si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M}_C = (B - C) \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B$$

in cui

$$(B - C) \wedge m\mathbf{v}_B = m \begin{vmatrix} \ell\,\sin\theta & \ell\,\cos\theta & 0 \\ (\dot{s} + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta) & -\ell\,\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = -m\ell \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\,\dot{\theta} + \dot{s}\cos\theta \end{pmatrix}$$

ed il momento angolare $\mathbf{M}_B$ rispetto al baricentro B è dato da

$$\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{3}\dot{\theta} \end{pmatrix} .$$

Devo inoltre calcolare

$$-\mathbf{v}_C \wedge m\mathbf{v}_B = -m \begin{vmatrix} \dot{s} & 0 & 0 \\ (\dot{s} + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta) & -\ell\,\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell\,\dot{s}\,\dot{\theta}\,\sin\theta \end{pmatrix} ;$$

$\mathbf{N}_C = (B-C)\wedge mg\hat{y} - (A-C)\wedge k(s+2\ell\,\sin\theta)\hat{x} = (B-C)\wedge(mg\hat{y} - 2k(s+2\ell\,\sin\theta)\hat{x}) =$

$$= \begin{vmatrix} \ell\,\sin\theta & \ell\,\cos\theta & 0 \\ -2k(s+2\ell\,\sin\theta) & mg & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg\ell\,\sin\theta + 2k\ell\,\cos\theta(s+2\ell\,\sin\theta) \end{pmatrix} .$$

Dalle espressioni precedenti otteniamo l'equazione

$$-\frac{4}{3}m\ell\ddot{\theta} - m\ddot{s}\cos\theta = mg\sin\theta + 2k\cos\theta(s+2\ell\,\sin\theta)$$

Scriviamo adesso la componente della 1^a equazione cardinale lungo la direzione di $\hat{x}$:

$$m\ddot{x}_B = -kx_A\,,$$

da cui otteniamo l'equazione

$$m\left(\ddot{s} - \ell\,\dot{\theta}^2\sin\theta + \ell\,\ddot{\theta}\cos\theta\right) = -k(s+2\ell\,\sin\theta)\ .$$