Esercizio 2. *Si consideri il sistema piano costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ vincolata per un estremo al baricentro G del disco. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Denotiamo inoltre con B il baricentro dell'asta (vedi figura).*

(i) *Si descriva il moto del sistema tramite le equazioni cardinali utilizzando le coordinate s, ϕ, in cui s è l'ascissa del punto del disco P a contatto con l'asse x e ϕ è l'angolo tra l'asta e la verticale, supposto crescente in senso antiorario;*

(ii) *si calcoli la componente della reazione vincolare Ψ_x tangente all'asse x nel punto P e si trovino le condizioni per cui tale componente è nulla.*

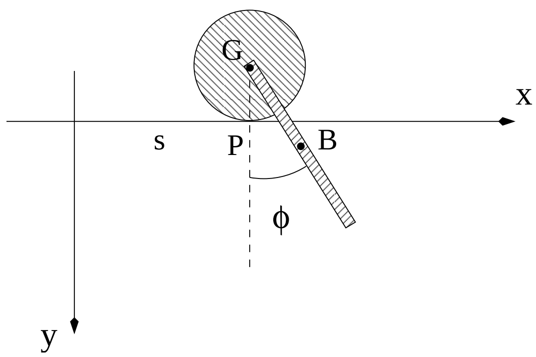

Figura 2:

Equazioni cardinali

(*i*) Detto B il baricentro dell'asta, scriviamo la 2^a equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo G:

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{asta} = -\mathbf{v}_G \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_G^{asta}$$

Le coordinate della posizione del baricentro G del disco sono

$$\begin{cases} x_G = s \\ y_G = -R \\ z_G = 0 \end{cases}$$

e le coordinate della posizione e della velocità di B sono

$$\begin{cases} x_B = s + \ell \sin\phi \\ y_B = -R + \ell \cos\phi \\ z_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_B = \dot{s} + \ell\,\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y}_B = -\ell\,\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{z}_B = 0 \end{cases}$$

Il momento angolare dell'asta rispetto al polo G si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M}_G^{asta} = (B - G) \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B^{asta}$$

in cui

$$(B-G)\wedge m\mathbf{v}_B = m\begin{vmatrix} \ell\sin\phi & \ell\cos\phi & 0 \\ \dot s+\ell\,\dot\phi\cos\phi & -\ell\,\dot\phi\sin\phi & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = -m\ell\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot s\cos\phi+\ell\,\dot\phi \end{pmatrix}$$

ed il momento angolare rispetto al baricentro B è

$$\mathbf{M}_B^{asta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{3}\dot\phi \end{pmatrix} .$$

Inoltre

$$-\mathbf{v}_G\wedge m\mathbf{v}_B = -m\begin{vmatrix} \dot s & 0 & 0 \\ \dot s+\ell\,\dot\phi\cos\phi & -\ell\,\dot\phi\sin\phi & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell\,\dot s\dot\phi\sin\phi \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{N}_G = (B-G)\wedge mg\hat{\mathbf{y}} = m\begin{vmatrix} \ell\,\sin\phi & \ell\,\cos\phi & 0 \\ 0 & g & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg\ell\,\sin\phi \end{pmatrix} .$$

Dalle espressioni precedenti otteniamo l'equazione

$$-m\ell\left[\ddot s\cos\phi - \dot s\dot\phi\sin\phi + \ell\ddot\phi\right] - \frac{m\ell^2}{3}\ddot\phi = m\ell\dot s\dot\phi\sin\phi + mg\ell\,\sin\phi$$

che semplificata diventa

$$\frac{4}{3}\ell\,\ddot\phi + \ddot s\cos\phi = -g\,\sin\phi\ . \tag{1}$$

Sia $P=P(t)$ il punto del disco a contatto con l'asse x al generico tempo t. Scriviamo la 2^a equazione cardinale per il sistema *asta* + *disco* rispetto al polo P: [1]

$$\dot{\mathbf{M}}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P\wedge(M\mathbf{v}_G + m\mathbf{v}_B) + \mathbf{N}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P\wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_P^{tot}$$

Il momento angolare totale rispetto a P si può scrivere sommando i due momenti angolari del disco e dell'asta rispetto allo stesso polo:

$$\mathbf{M}_P^{tot} = \mathbf{M}_P^{disco} + \mathbf{M}_P^{asta}$$

in cui

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_P^{disco} &= (G-P)\wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G^{disco} \\ \mathbf{M}_P^{asta} &= (B-P)\wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B^{asta} \end{aligned}$$

[1] Osserviamo che qui $\mathbf{v}_P$ è la velocità del polo e non la velocità di P come punto del corpo rigido (che è nulla per definizione di moto senza strisciamento): per cui $\mathbf{v}_P$ e $\mathbf{v}_G$ sono paralleli, ma $\mathbf{v}_P$ non è necessariamente nulla.

$$(G-P)\wedge M\mathbf{v}_G = M\begin{vmatrix} 0 & -R & 0 \\ \dot{s} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ MR\dot{s} \end{pmatrix} ; \qquad \mathbf{M}_G^{disco} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{MR}{2}\dot{s} \end{pmatrix} ;$$

$$(B-P)\wedge m\mathbf{v}_B = m\begin{vmatrix} \ell\,\sin\phi & -R+\ell\,\cos\phi & 0 \\ \dot{s}+\ell\,\dot{\phi}\cos\phi & -\ell\,\dot{\phi}\sin\phi & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell^2\,\dot{\phi} + m\ell\cos\phi(R\dot{\phi}-\dot{s}) + mR\dot{s} \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{M}_B^{asta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{3}\dot{\phi} \end{pmatrix} .$$

Inoltre

$$-\mathbf{v}_P\wedge m\mathbf{v}_B = -m\begin{vmatrix} \dot{s} & 0 & 0 \\ \dot{s}+\ell\,\dot{\phi}\cos\phi & -\ell\,\dot{\phi}\sin\phi & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell\,\dot{s}\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{N}_P^{tot} = (B-P)\wedge mg\hat{\mathbf{y}} = m\begin{vmatrix} \ell\,\sin\phi & -R+\ell\,\cos\phi & 0 \\ 0 & g & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg\ell\,\sin\phi \end{pmatrix} .$$

Dalle espressioni precedenti otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{3}{2}M+m\right)R\ddot{s} - \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\phi} + m\ell\,R\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) - m\ell\,\ddot{s}\cos\phi = mg\ell\,\sin\phi\,,$$

ed usando l'equazione (1) essa si riduce a

$$\left(\frac{3}{2}M+m\right)R\ddot{s} + m\ell\,R\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) = 0\ . \tag{2}$$

(ii) Per calcolare la componente Ψ_x della reazione vincolare scriviamo la 2^a equazione cardinale per il solo disco rispetto al polo G:

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{disco} = \mathbf{N}_G^{disco}\ .$$

Abbiamo

$$\mathbf{M}_G^{disco} = \frac{MR}{2}\dot{s}\,\hat{\mathbf{z}}\,;$$

$$\mathbf{N}_G^{disco} \quad = \quad (P-G)\wedge\Psi_x\,\hat{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 0 & R & 0 \\ \Psi_x & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = -R\Psi_x\,\hat{\mathbf{z}}\ .$$

Otteniamo l'equazione

$$\frac{MR}{2}\ddot{s} = -R\Psi_x \, , \tag{3}$$

da cui segue l'espressione per la componente della reazione vincolare:

$$\Psi_x = -\frac{M}{2}\ddot{s} \; .$$

Quindi se il baricentro del disco si muove di moto rettilineo uniforme si ha $\Psi_x = 0$.

Si poteva anche utilizzare la 1^a equazione cardinale proiettata nella direzione di $\hat{\mathbf{x}}$:

$$(M\mathbf{a}_G + m\mathbf{a}_B)_x = \Psi_x \, ,$$

che in termini delle coordinate s, θ si scrive

$$(M+m)\ddot{s} + m\ell\,(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) = \Psi_x \; .$$

Utilizzando la (3) per eliminare la componente della reazione vincolare Ψ_x, otteniamo direttamente l'equazione del moto (2).