Esercizio 3. *Si consideri il sistema piano descritto in figura 3, costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio r e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. Il disco può rotolare senza strisciare all'interno di una circonferenza di raggio $R > r$. L'asta ha un estremo vincolato al baricentro G del disco (tale vincolo è liscio), l'altro estremo A è collegato tramite una molla all'asse x; la molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, è vincolata a restare sempre parallela all'asse y.*

(i) Si scrivano le equazioni del moto del sistema nelle coordinate ϕ, θ dove ϕ è l'angolo tra la congiungente OG e l'asse y, mentre θ è l'angolo tra la direzione dell'asta GA e la direzione verticale. Il verso scelto per contare gli angoli è quello antiorario.

(ii) Si trovi la componente della reazione vincolare che è tangente alla circonferenza nel punto P del disco a contatto con essa (vedi figura).

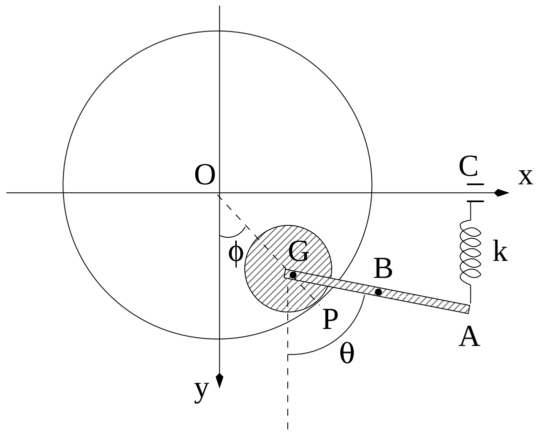

Figura 3:

Equazioni cardinali

(i) Scriviamo la 2^a equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo G:

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{asta} = -\mathbf{v}_G \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_G^{asta}$$

in cui B è il baricentro dell'asta.

Consideriamo un sistema di riferimento $Oxyz$ formato da una terna levogira con gli assi x, y come in figura. Le coordinate della posizione e della velocità del baricentro G del disco sono

$$\begin{cases} x_G = (R-r)\sin\phi \\ y_G = (R-r)\cos\phi \\ z_G = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_G = (R-r)\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y}_G = -(R-r)\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{z}_G = 0 \end{cases}$$

Le coordinate della posizione e della velocità del baricentro B dell'asta sono

$$\begin{cases} x_B = (R-r)\sin\phi + \ell\,\sin\theta \\ y_B = (R-r)\cos\phi + \ell\,\cos\theta \\ z_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_B = (R-r)\dot{\phi}\cos\phi + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_B = -(R-r)\dot{\phi}\sin\phi - \ell\,\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{z}_B = 0 \end{cases}$$

Il momento angolare dell'asta rispetto al polo G si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M}_G^{asta} = (B-G)\wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B^{asta}$$

in cui

$$(B-G)\wedge m\mathbf{v}_B = m\begin{vmatrix} \ell\,\sin\theta & \ell\,\cos\theta & 0 \\ (R-r)\dot{\phi}\cos\phi + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta & -(R-r)\dot{\phi}\sin\phi - \ell\,\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= -m\ell\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)\dot{\phi}\cos(\theta-\phi) + \ell\,\dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{4}$$

ed il momento angolare rispetto al baricentro B è

$$\mathbf{M}_B^{asta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{m\ell^2}{3}\dot{\theta} \end{pmatrix}\ . \tag{5}$$

Inoltre

$$-\mathbf{v}_G\wedge m\mathbf{v}_B = -\mathbf{v}_G\wedge m(\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m(R-r)\ell\,\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta-\phi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_G = (B-G)\wedge mg\hat{y} + (A-G)\wedge kg\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg\ell\,\sin\theta - 2k\ell\,\sin\theta\,[(R-r)\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta] \end{pmatrix}$$

Dalle espressioni precedenti si ottiene l'equazione

$$-(R-r)\cos(\theta-\phi)\ddot{\phi} - (R-r)\sin(\theta-\phi)\dot{\phi}^2 - \frac{4}{3}\ell\,\ddot{\theta} = g\sin\theta - 2\frac{k}{m}\sin\theta\,[(R-r)\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta]\ . \tag{6}$$

Sia $P = P(t)$ il punto del disco a contatto con la circonferenza al generico tempo t. Scriviamo la 2^a equazione cardinale per il sistema *asta* + *disco* rispetto al polo P: [2]

$$\dot{\mathbf{M}}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P\wedge(M\mathbf{v}_G + m\mathbf{v}_B) + \mathbf{N}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P\wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_P^{tot}$$

[2] Osserviamo che qui $\mathbf{v}_P$ è la velocità del polo e non la velocità istantanea di P come punto del corpo rigido (che è nulla per definizione di moto senza strisciamento): per cui $\mathbf{v}_P$ e $\mathbf{v}_G$ sono paralleli, ma $\mathbf{v}_P$ non è necessariamente nulla

Il momento angolare totale rispetto a P si può scrivere sommando i due momenti angolari del disco e dell'asta rispetto allo stesso polo:

$$\mathbf{M}_P^{tot} = \mathbf{M}_P^{disco} + \mathbf{M}_P^{asta}$$

in cui

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_P^{disco} &= (G-P) \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G^{disco} \\
\mathbf{M}_P^{asta} &= (B-P) \wedge m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B^{asta}
\end{aligned}$$

$$(G-P)\wedge M\mathbf{v}_G = M \begin{vmatrix} -r\sin\phi & -r\cos\phi & 0 \\ (R-r)\dot\phi\cos\phi & -(R-r)\dot\phi\sin\phi & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mr(R-r)\dot\phi \end{pmatrix} ;$$

La velocità angolare del disco è

$$\boldsymbol{\omega}_d = \left(0, 0, \frac{(R-r)}{r}\dot\phi\right)^t ,$$

quindi

$$\mathbf{M}_G^{disco} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{Mr}{2}(R-r)\dot\phi \end{pmatrix} .$$

Osserviamo che

$$(B-P) \wedge m\mathbf{v}_B = (B-G) \wedge m\mathbf{v}_B + (G-P) \wedge m\mathbf{v}_B$$

e che il primo termine della somma lo abbiamo già calcolato in (4); inoltre

$$(G-P)\wedge m\mathbf{v}_B = m \begin{vmatrix} -r\sin\phi & -r\cos\phi & 0 \\ (R-r)\dot\phi\cos\phi + \ell\,\dot\theta\cos\theta & -(R-r)\dot\phi\sin\phi - \ell\,\dot\theta\sin\theta & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(R-r)\dot\phi + r\ell\,\dot\theta\cos(\theta-\phi) \end{pmatrix} ,$$

per cui

$$(B-P)\wedge m\mathbf{v}_B = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(R-r)\dot\phi - \ell^2\,\dot\theta + r\ell\,\dot\theta\cos(\theta-\phi) - \ell\,(R-r)\dot\phi\cos(\theta-\phi) \end{pmatrix} ; \tag{7}$$

ed il momento angolare $\mathbf{M}_B^{asta}$ è dato dalla (5).

Inoltre

$$-m\mathbf{v}_P \wedge \mathbf{v}_B = -m\mathbf{v}_P \wedge \left(\mathbf{v}_B - \frac{(R-r)}{R}\mathbf{v}_P\right) = -m \begin{vmatrix} R\dot\phi\cos\phi & -R\dot\phi\sin\phi & 0 \\ \ell\,\dot\theta\cos\theta & -\ell\,\dot\theta\sin\theta & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mR\ell\,\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P^{tot} &= (G-P)\wedge Mg\hat{y} + (B-P)\wedge mg\hat{y} + (A-P)\wedge k(C-A) = \\ &= \begin{vmatrix} -r\sin\phi & -r\cos\phi & 0 \\ 0 & Mg & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -r\sin\phi + \ell\,\sin\theta & -r\cos\phi + \ell\,\cos\theta & 0 \\ 0 & mg & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -r\sin\phi + 2\ell\,\sin\theta & -r\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta & 0 \\ 0 & -k\left[(R-r)\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta\right] & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mgr\sin\phi - mg(r\sin\phi - \ell\,\sin\theta) + k(r\sin\phi - 2\ell\,\sin\theta)\left[(R-r)\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta\right] \end{pmatrix} .$$

Dalle espressioni precedenti otteniamo l'equazione

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}M + m\right) r(R-r)\ddot\phi - \frac{4}{3}m\ell^2\ddot\theta + m\ell\, r\ddot\theta\cos(\phi-\theta) + m\ell\, r\dot\theta^2\sin(\phi-\theta) - \\ &-m\ell\,(R-r)\ddot\phi\cos(\phi-\theta) + m\ell\,(R-r)\dot\phi^2\sin(\phi-\theta) = -(M+m)gr\sin\phi + mg\ell\,\sin\theta + \\ &+k(r\sin\phi - 2\ell\,\sin\theta)\left[(R-r)\cos\phi + 2\ell\,\cos\theta\right] \ . \end{aligned}$$

(ii) Scriviamo la 2^a equazione cardinale per il solo disco rispetto al polo G: in questo modo la componente radiale della reazione vincolare, cioè quella lungo il versore, $(\sin\phi, \cos\phi)$, non conta essendo parallela al vettore $P - G$. Denotiamo con Ψ_τ la componente della reazione vincolare $\boldsymbol{\Psi}$ lungo il versore $\boldsymbol{\tau} = (\cos\phi, -\sin\phi)$. L'equazione cardinale è

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{disco} = \mathbf{N}_G^{disco}$$

Inoltre

$$\mathbf{M}_G^{disco} = -\frac{Mr}{2}(R-r)\dot\phi\ \hat{\mathbf{z}}$$

e

$$\mathbf{N}_G^{disco} = (P-G)\wedge\Psi_\tau\boldsymbol{\tau} = -r\Psi_\tau\ \hat{\mathbf{z}}\ .$$

Dalle espressioni precedenti otteniamo

$$\Psi_\tau = -\frac{M(R-r)}{2}\ddot\phi\,,$$

dunque la componente tangente alla circonferenza della reazione vincolare è nulla se il baricentro del disco si muove di moto circolare uniforme.