3

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE E DI HAMILTON

3.1 Introduzione

Vi sono due problemi che conducono spontaneamente al formalismo lagrangiano e a quello hamiltoniano nell'ambito delle equazioni di Newton: il problema dell'espressione delle equazioni in un sistema di coordinate arbitrario, e il problema dell'eliminazione delle reazioni vincolari nei sistemi vincolati. Entrambi tali problemi si pongono già per sistemi costituiti da un solo punto materiale, e pertanto li illustreremo qui in tale caso, rinviando ai prossimi paragrafi la trattazione generale.

3.1.1 Il punto materiale in coordinate arbitrarie.

Vediamo il primo problema. L'equazione di Newton per un punto P di massa m soggetto a forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t)$ in un sistema di riferimento inerziale,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \ , \tag{3.1}$$

è un'equazione vettoriale, cui corrisponde un sistema di tre equazioni scalari. Così, se x, y, z sono le coordinate cartesiane ortogonali di P in un sistema di riferimento fisso, e F_x, F_y, F_z le corrispondenti componenti di $\mathbf{F}$, la (3.1) è equivalente al sistema

$$m\ddot{x} = F_x \ , \qquad m\ddot{y} = F_y \ , \qquad m\ddot{z} = F_z \ . \tag{3.2}$$

Spesso è però conveniente riferirsi ad altri sistemi di coordinate, tipicamente quelle polari o cilindriche, se ad esempio il campo di forze è rispettivamente a simmetria sferica o a simmetria cilindrica. In tali casi, come si verifica direttamente in maniera elementare, le equazioni scalari non hanno la semplice forma, o struttura, (3.2), ma una forma più complicata. Ad esempio, per un punto in un piano, usando coordinate polari (r, φ) abbiamo visto che si hanno le equazioni

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \ , \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \ , \tag{3.3}$$

se F_r, F_φ sono le componenti di $\mathbf{F}$ sui versori $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ tangenti alle linee coordinate.[1)] Così per un punto P nello spazio $\mathbb{R}^3$ ci si pone il problema di quale forma abbiano le equazioni di Newton in un sistema di coordinate qualsiasi.

Ricordiamo che un cambiamento di coordinate dalle consuete coordinate cartesiane x, y, z a un generico sistema q_1, q_2, q_3 è definito localmente (cioè per q_1, q_2, q_3 in un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$) da tre funzioni regolari

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \ , \qquad y = y(q_1, q_2, q_3) \ , \qquad z = z(q_1, q_2, q_3) \ , \tag{3.4}$$

o con notazione più compatta

$$P = P(q_1, q_2, q_3) \ , \tag{3.5}$$

per le quali la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}$ abbia, in U, determinante non nullo (o equivalentemente abbia rango, o caratteristica, 3). Come è ben noto, ciò significa che i tre vettori

$$\frac{\partial P}{\partial q_h} = \frac{\partial x}{\partial q_h}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_h}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_h}\mathbf{k} \ , \qquad h = 1, 2, 3 \ ,$$

che costituiscono le colonne della matrice considerata, sono linearmente indipendenti, ovvero una base in $\mathbb{R}^3$; in particolare ciò implica l'invertibilità locale del cambiamento di coordinate. Si chiamano *linee coordinate* quelle curve definite dalle (3.4) quando si lascia variare una sola delle coordinate q_h; ciascuno dei vettori $\frac{\partial P}{\partial q_h}$ risulta essere tangente alla corrispondente linea coordinata.

Abbiamo ora il problema di dedurre dall'equazione vettoriale di Newton tre equazioni scalari per le incognite $q_h(t)$, $h = 1, 2, 3$. E' evidente allora che la via più spontanea per ottenere queste equazioni è di proiettare l'equazione di Newton, punto per punto, sulle tre direzioni tangenti alle linee coordinate, scrivendo

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, 2, 3 \ . \tag{3.6}$$

Mostreremo nel prossimo paragrafo che, comunque si siano scelte le coordinate, tali equazioni hanno sempre la medesima forma, quella delle equazioni di Lagrange. Precisamente (limitandosi al caso significativo di forza attiva posizionale derivante da energia potenziale, $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$), si definisce la funzione $L = T - V$ (*differenza* di energia cinetica ed energia potenziale), detta funzione di Lagrange o *lagrangiana*, che deve pensarsi espressa come funzione delle coordinate $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e delle velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}} = (\dot q_1, \dot q_2, \dot q_3)$, $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e allora si dimostra che le equazioni (3.6)

[1)] Cioè le linee in cui varia una sola delle coordinate.

hanno la forma (Lagrange, circa 1780)[2)]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h}\ , \qquad h = 1, \ldots, n\ , \tag{3.7}$$

con $n = 3$.

- **Osservazione.** E' immediato verificare che in coordinate cartesiane le equazioni di Newton (3.2) possono scriversi anche nella forma di Lagrange. Infatti, in tal caso è
$$L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x,y,z)\ ;$$
così si ha ad esempio $\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$, e dunque $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\ddot x$, mentre d'altra parte è $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$.

- **Esercizio 3.1:** Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange per un punto in un piano, riferito a coordinate polari, soggetto a energia potenziale $V = V(r)$; confrontare il risultato con le equazioni (3.3).
Risposta:
$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r)\ ,$$
$$m\ddot r = mr\dot\varphi^2 - V'(r)\ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\varphi) = 0\ .$$

- **Esercizio 3.2:** Si considerino le coordinate polari sferiche $(q_1,q_2,q_3) = (\rho,\vartheta,\varphi)$, definite da
$$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi\ , \qquad y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi\ , \qquad z = \rho\cos\vartheta\ . \tag{3.8}$$
Si scrivano i tre vettori tangenti alle linee coordinate, $\frac{\partial P}{\partial\rho}$, $\frac{\partial P}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial P}{\partial\varphi}$, e quindi la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)}$; si verifichi che essa ha rango 3, ovunque tranne che sull'asse polare (asse z). Si studi allo stesso modo il passaggio alle coordinate cilindriche r,φ,z.

3.1.2 Il punto materiale vincolato.

Veniamo ora al secondo problema, delle equazioni di moto per un punto vincolato. Cominciamo con l'aspetto cinematico del problema, nel caso di un punto su una assegnata superficie $\mathcal{Q}$ (*varietà vincolare*, o *spazio delle configurazioni*). Ricordiamo che una superficie $\mathcal{Q}$ può essere definita in forma implicita, cioè tramite un'equazione $F(x,y,z) = 0$, con F regolare e tale che $\operatorname{grad} F$ non si annulli su $\mathcal{Q}$, oppure in forma parametrica. Come è noto dall'analisi, per ogni superficie definita in modo implicito è possibile dare localmente una rappresentazione parametrica (mediante funzioni

---

[2)] In altri termini, può dunque dirsi che il formalismo di Lagrange fornisce una tecnica per il calcolo delle componenti dell'accelerazione e della forza, in un sistema arbitrario di coordinate (per tale motivo la collocazione più naturale dell'esposizione delle equazioni di Lagrange sarebbe forse quella del cosiddetto *calcolo tensoriale*). Si osservi in particolare che è sufficiente nelle nuove coordinate fare il calcolo dell'energia cinetica, che coinvolge solo derivate prime, mentre il calcolo più complicato per le derivate seconde è in qualche modo automatico.

regolari), nella forma

$$x = x(q_1, q_2) \ , \qquad y = y(q_1, q_2) \ , \qquad z = z(q_1, q_2) \ , \tag{3.9}$$

o con notazione compatta

$$P = P(q_1, q_2) \ , \tag{3.10}$$

dove $(q_1, q_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, con U aperto.[3] In particolare, la superficie ammette in ogni punto piano tangente, e la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2)}$ ha rango 2; ciò significa che la coppia di vettori $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, $h = 1, 2$, è, in ogni punto $P \in \mathcal{Q}$, una base per il piano tangente alla superficie $\mathcal{Q}$ in P (denotato con $T_P\mathcal{Q}$). Dunque ogni vettore tangente si può rappresentare come combinazione lineare di tali due vettori. Per i vettori tangenti ci atterremo alla notazione tradizionale δP, denotando corrispondentemente le componenti con δq_h, $h = 1, 2$, ovvero scriveremo

$$\delta P = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial q_h} \delta q_h \ , \tag{3.11}$$

con $n = 2$; il vettore $\delta P \in T_P\mathcal{Q}$ viene tradizionalmente detto *spostamento virtuale*.[4] Le coordinate locali q_1, q_2 sono dette *coordinate libere*, o gaussiane; le curve sulla superficie ottenute facendo variare solo q_1 o solo q_2 sono dette linee coordinate, e sono in ogni punto tangenti rispettivamente ai vettori $\frac{\partial P}{\partial q_1}$, $\frac{\partial P}{\partial q_2}$.

- **Esempio.** Si consideri il pendolo sferico, ovvero un punto materiale soggetto al vincolo $F(x, y, z) = 0$, con $F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$; la condizione $\operatorname{grad} F \neq 0$ sulla sfera $F = 0$ è soddisfatta. Nella semisfera superiore (o inferiore) si possono usare $q_1 = x$ e $q_2 = y$ come coordinate libere; le equazioni parametriche corrispondentemente sono

$$x = q_1 \ , \qquad y = q_2 \ , \qquad z = \sqrt{R^2 - q_1^2 - q_2^2} \ , \tag{3.12}$$

e la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2)}$ ha rango 2 per $z > 0$. Sull'equatore ($z = 0$) tale scelta delle coordinate libere non è più lecita, perché viene meno la differenziabilità delle (3.12). Una diversa scelta, generalmente preferita, delle coordinate libere, è data dagli angoli $q_1 = \vartheta$ e $q_2 = \varphi$ delle coordinate sferiche. In questo caso le equazioni parametriche si scrivono

$$x = R \sin q_1 \cos q_2 \ , \qquad y = R \sin q_1 \sin q_2 \ , \qquad z = R \cos q_1$$

(si tratta evidentemente delle (3.8), con $\rho = R$). si verifica facilmente che la condizione sul rango è soddisfatta ovunque, tranne che sui poli ($q_1 = 0, \pi$).

---

[3] Una rappresentazione possibile (benché non sempre conveniente) si ottiene dal teorema della funzione implicita: se ad esempio in un punto si ha $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, allora la superficie si può descrivere localmente come il grafico di una funzione $z = f(x, y)$, con una opportuna f; in tal caso le (3.9) sono date da $x = q_1$, $y = q_2$, $z = f(q_1, q_2)$.

[4] Un modo significativo di rileggere la (3.11) è quello di riguardarla come l'applicazione tangente (o derivata) $\mathrm{d}P$ alla applicazione $P : U \to \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ definita dalla (3.10); $\mathrm{d}P$ è una applicazione lineare da $T_{\mathbf{q}}U$ a $T_{P(\mathbf{q})}\mathcal{Q}$, che manda il vettore $\delta\mathbf{q}$ di componenti δq_1, δq_2 nel vettore δP, ed è rappresentata in coordinate dalla matrice $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2)}$.

Consideriamo infine il caso di un punto vincolato a muoversi su una assegnata curva $\mathcal{Q}$. Questa può essere definita implicitamente tramite una coppia di equazioni $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$, con funzioni F, G indipendenti, precisamente tali che, su $\mathcal{Q}$, la matrice jacobiana $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}$ abbia rango 2 (o equivalentemente, che i vettori $\operatorname{grad} F$, $\operatorname{grad} G$ siano linearmente indipendenti).[5] In tal caso la posizione del punto P sulla curva è individuata da una sola coordinata libera, diciamo q_1, e si ha per la curva la rappresentazione parametrica $x = x(q_1)$, $y = y(q_1)$, $z = z(q_1)$, ovvero $P = P(q_1)$, con la proprietà $\frac{\partial P}{\partial q_1} \neq 0$.

Si vede allora che, da un punto di vista cinematico, i due casi ora considerati di punto vincolato a una curva o a una superficie si presentano in modo formalmente analogo a quello del punto non vincolato, descritto in coordinate arbitrarie: in ogni caso la posizione del punto P si esprime localmente (cioè in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$) nella forma parametrica

$$P = P(q_1, \ldots, q_n) \ , \tag{3.13}$$

mediante tre funzioni regolari, essendo rispettivamente $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$; inoltre, i vettori $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, $h = 1, \ldots, n$, tangenti alle linee coordinate, sono linearmente indipendenti. Si dice che n è il *numero dei gradi di libertà*, e che le q_h sono delle *coordinate libere*. Nel discutere il problema del moto per un punto vincolato, dal punto di vista analitico ci atterremo alla descrizione del vincolo in forma parametrica, ovvero con equazioni del tipo (3.13), con le coordinate libere in un certo aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. In altri termini, ci occuperemo di scrivere le equazioni del moto *localmente*. Otterremo così quelle che si chiamano le equazioni di Lagrange nella seconda forma.[6]

Venendo ora al problema della dinamica per un punto vincolato, si deve anzitutto tener presente che il vincolo deve pensarsi realizzato fisicamente mediante una forza (detta *reazione vincolare*) che non è nota a priori. Infatti, consideriamo ad esempio il problema di un punto di massa m appoggiato ad un pavimento orizzontale. Già sappiamo che sul punto si esercita la forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$. Se dunque osserviamo che esso non si muove, e ammettiamo che valga l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{R}$ (dove $\mathbf{R}$ è il risultante — cioè la somma vettoriale — delle forze agenti sul punto), allora da $\mathbf{a} = 0$ segue $\mathbf{R} = 0$. Quindi non potrà essere $\mathbf{R} = \mathbf{F}$, ma sarà invece $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$ con una opportuna $\mathbf{\Phi}$, precisamente $\mathbf{\Phi} = -\mathbf{F}$: il pavimento reagisce alla sollecitazione del peso esercitando sul punto una forza (reazione vincolare) $\mathbf{\Phi}$, che bilancia esattamente la forza peso. In particolare, dunque, la reazione vincolare "si adatta" alla sollecitazione, e non è nota a priori; anzi, in generale essa dipende anche dalla velocità del punto.[7]

---

[5] In particolare, ciò comporta che le due superfici $F = 0$, $G = 0$ sono separatamente ben definite, e inoltre che esse si intersecano trasversalmente.

[6] Considerando ad esempio il caso della superficie, si potrebbe anche dare una trattazione analitica esprimendo il vincolo nella forma globale $F = 0$. Si giungerebbe in tal modo alle cosiddette equazioni di Lagrange nella prima forma, di uso non frequente.

[7] Il fatto che la reazione vincolare non sia puramente posizionale, ma dipenda in generale dal movimento (tipicamente, come nell'esempio che segue, dal quadrato della velocità), pone dei problemi non banali, se si vuole costruire un modello fisico di vincolo, ovvero di dispositivo che non per magia, ma obbedendo alle leggi della meccanica, sia in grado di fornire di volta in volta la

Ciò risulta evidente, ad esempio, nel caso semplice di un punto in moto uniforme su una circonferenza orizzontale: è noto che in questo caso l'accelerazione è puramente radiale ($a_\varphi = 0$), e che si ha $a_r = -r\dot\varphi^2$; dunque, da $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$ (con $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$), segue[8] $\mathbf{\Phi} = -m\dot\varphi^2 r\mathbf{e}_r - \mathbf{F}$.

In generale dunque, per un punto vincolato scriveremo l'equazione di Newton nella forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} \ , \tag{3.14}$$

dove si intende che $\mathbf{F}$ denota la "*forza attiva*", ovvero la parte della forza risultante $\mathbf{R}$ che è indipendente dal vincolo e viene considerata nota a priori (ad esempio, la forza peso), mentre $\mathbf{\Phi}$ denota la parte di $\mathbf{R}$ che traduce la reazione della struttura realizzante il vincolo, e deve essere considerata come una ulteriore incognita del problema. Si tratta allora di fornire delle ulteriori relazioni, che permettano di determinare i due elementi incogniti, il movimento $P(t)$ e la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}(t)$ che ad esso si accompagna.

Il metodo lagrangiano si applica al caso in cui i vincoli siano, come si dice, *ideali* o *perfetti*, e permette di determinare equazioni per il movimento $P = P(t)$, nelle quali non compare esplicitamente la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$. Una volta determinato il movimento $P(t)$, e di conseguenza l'accelerazione $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}P(t)$, la reazione vincolare, se richiesta, si determina mediante la relazione $\mathbf{\Phi} = m\mathbf{a} - \mathbf{F}$.

Una definizione generale di vincolo ideale sarà introdotta in un prossimo paragrafo. Nel caso semplice qui considerato di un punto materiale vincolato a una superficie o a una curva assegnata, il vincolo viene detto ideale se la superficie o la curva sono *lisce*, cioè se la reazione vincolare nel punto P è sempre esattamente perpendicolare alla superficie o alla curva in P. Ricordando che denotiamo con δP uno "spostamento virtuale", ovvero un generico vettore tangente a $\mathcal{Q}$ in P, $\delta P = \sum_h \frac{\partial P}{\partial q_h}\delta q_h$ con δq_h arbitrari, la condizione suddetta si esprime analiticamente nella forma

$$\mathbf{\Phi} \cdot \delta P = 0 \ , \tag{3.15}$$

per tutti gli spostamenti virtuali δP, o equivalentemente mediante le n condizioni

$$\mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.16}$$

- **Osservazione.** La condizione (3.15) si può esprimere dicendo che la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$ compie lavoro nullo per tutti gli spostamenti virtuali δP. Come vedremo, proprio in questa forma la condizione di idealità può essere più facilmente

---

reazione vincolare necessaria a rendere il moto conforme al vincolo. Per un'introduzione a questo problema (piuttosto trascurato nella letteratura: non se ne trova traccia nei testi classici), si veda V.I. Arnold *Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti (Roma)* e G. Gallavotti, *Meccanica Elementare,* Boringhieri (Torino, 1980). L'idea di fondo, pur non facile da conciliare con la necessità di forze dipendenti dalla velocità, è tuttavia quella intuitiva, cioè che il vincolo sia realizzato da dispositivi dotati di elevata rigidità (moduli elastici grandi, al limite infiniti), in grado di reagire con forze arbitrariamente grandi alle deformazioni.

[8] Questo modo di calcolare una forza – qui la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$ – attraverso l'equazione di Newton, conoscendo il movimento, è concettualmente simile a quello che si segue nel problema inverso (Capitolo 2) per determinare la legge di forza, noti i movimenti.

generalizzata al caso di più punti materiali, in particolare a casi che sfuggono alla nozione intuitiva di superficie liscia (come il caso di puro rotolamento per una ruota su una guida perfettamente scabra).

Proprio la condizione (3.16) di idealità del vincolo permette di ottenere n *equazioni pure* (equazioni cioè in cui è stata eliminata la reazione vincolare): infatti dalla (3.14), scritta nella forma $m\mathbf{a} - \mathbf{F} = \mathbf{\Phi}$, si ha

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.17}$$

con $n = 1$ per il punto sulla curva, $n = 2$ per il punto sulla superficie. Per confronto con la (3.6), che coincide formalmente con la (3.17) pur di porre $n = 3$, si vede così che anche per la dinamica (e non solo per la cinematica) il caso del punto vincolato a una linea liscia o a una superficie liscia è analogo a quello del punto non vincolato descritto in coordinate arbitrarie, essendo diverso soltanto in ogni caso il numero dei gradi di libertà n.

Mostreremo nel prossimo paragrafo che anche nel caso dei sistemi vincolati, e dunque per ogni n, le equazioni (3.17) hanno la forma delle equazioni di Lagrange (3.7).

- **Esercizio 3.3:** Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange per il pendolo semplice, prendendo come coordinata libera il consueto angolo ϑ, contato a partire dalla verticale discendente.
  Risposta: $L(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot\vartheta^2 + mgl \cos\vartheta$; $\qquad \ddot\vartheta + \omega^2 \sin\vartheta = 0$, con $\omega^2 = g/l$.

3.1.3 Una generalizzazione.

Le considerazioni svolte sopra per il moto di un punto si estendono a due altri problemi interessanti. Il primo è il problema dei *vincoli mobili*; esempi tipici sono un punto vincolato a un'asta che ruota uniformemente in un piano orizzontale, o un pendolo matematico vincolato a un piano verticale che ruota uniformemente attorno a un asse verticale passante per il centro del pendolo. Il secondo, ancor più significativo, è il *problema del moto relativo*: determinare le equazioni cui soddisfano le coordinate q_1, q_2, q_3 di un punto rispetto a un sistema di riferimento mobile.[9] Nella trattazione elementare data nel capitolo sulla meccanica newtoniana, si è mostrato come il problema si riconduca alla determinazione delle "forze apparenti", che possono essere calcolate in termini del moto conosciuto della terna mobile. Invece il metodo lagrangiano è alquanto più semplice, perchè non richiede di calcolare le forze apparenti. In effetti, risulta che, dal punto di vista cinematico, sia il caso di vincoli mobili sia quello dei moti relativi si distinguono da quelli sopra considerati solo per la circostanza che la relazione cinematica che esprime la posizione del punto in termini delle coordinate

[9] Ad esempio, si introducono le coordinate cartesiane ortogonali q_1, q_2, q_3 rispetto a un sistema ruotante uniformemente con velocità angolare ω attorno all'asse fisso $\mathbf{k}$. In tal caso si ha $x = q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t$, $y = q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t$, $z = q_3$, se x, y, z sono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P in un sistema fisso, con la stessa origine del sistema mobile.

libere dipende esplicitamente dal tempo, cioè è del tipo

$$P = P(q_1, \ldots, q_n, t) \tag{3.18}$$

anziché del tipo (3.13). D'altra parte, anche la nozione di vincolo ideale si trasporta senza variazioni al caso di vincolo mobile, sicché, come vedremo, la deduzione delle equazione di Lagrange si può fare in modo unitario, trattando il caso di vincolo mobile, o di cambiamento di coordinate dipendente dal tempo, assieme al caso senza dipendenza esplicita da t.

In questo capitolo daremo una dimostrazione delle equazioni di Lagrange per un sistema di un numero qualsiasi di punti vincolati, seguendo la linea indicata qui sopra. Tale trattazione comprende anche il problema del cambiamento di variabili, che si presenta come il caso particolare in cui sono nulle le reazioni vincolari.[10)] Mostreremo poi l'equivalenza delle equazioni di Lagrange e delle equazioni di Hamilton. Discuteremo inoltre delle leggi di conservazione, e della loro connessione con le proprietà di simmetria (teorema di Noether), e daremo il classico criterio per l'esistenza di punti di equilibrio in sistemi autonomi (principio dei lavori virtuali) e per la loro stabilità. Concluderemo infine con una succinta trattazione della linearizzazione delle equazioni di Lagrange attorno ai punti di equilibrio; in particolare discuteremo brevemente i modi normali di oscillazione attorno ai punti di equilibrio stabile.

3.2 Sistemi vincolati di N punti materiali

3.2.1 *Vincoli olonomi e coordinate libere*

Dopo aver illustrato, nel paragrafo precedente, lo scopo del formalismo lagrangiano, e aver in particolare introdotto la nozione di vincolo e coordinate libere per un punto materiale, veniamo ora al caso generale di un numero qualsiasi di punti materiali. Consideriamo pertanto un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$, e per praticità introduciamo, per le loro coordinate cartesiane, la notazione compatta

$$\mathbf{w} \;=\; (w_1, \ldots, w_{3N}) \;=\; (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) \;;$$

il vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ rappresenta dunque la configurazione del sistema degli N punti.

Definizione 3.1: *Si dice che un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_n$ è soggetto a r vincoli olònomi, $0 < r < 3N$, se l'insieme delle configurazioni $\mathbf{w}$ accessibili soddisfa r equazioni della forma*

$$F^{(s)}(\mathbf{w}, t) \;=\; 0 \;, \qquad s = 1, \ldots, r \;, \tag{3.19}$$

[10)] Si potrebbero anche dedurre le equazioni di Lagrange a partire dai cosiddetti principi variazionali (di Hamilton o di Maupertuis); tale trattazione è rinviata al prossimo capitolo.

ove $F^{(1)}, \ldots, F^{(s)}$ sono funzioni regolari e indipendenti, precisamente tali che sia

$$\text{rango}\left(\frac{\partial F^{(s)}}{\partial w_j}\right) = r \tag{3.20}$$

per ogni configurazione accessibile al sistema (ovvero dove la (3.19) è soddisfatta).

Resta così definita, per ogni tempo t, una varietà $\mathcal{Q}$ di dimensione $n = 3N-r$, immersa in $\mathbb{R}^{3N}$; $\mathcal{Q}$ è chiamata *varietà vincolare* o *spazio delle configurazioni*, mentre n è detto *numero dei gradi di libertà* del sistema vincolato.

La condizione (3.20) consente di introdurre, almeno localmente, una rappresentazione parametrica di $\mathcal{Q}$, cioè di esprimere le coordinate $w_1, \ldots, w_{3N}$ in funzione di n parametri o *coordinate libere* $q_1, \ldots, q_n$. Infatti, in virtù del teorema della funzione implicita,[11] si mostra che la varietà vincolare $\mathcal{Q}$ si può sempre rappresentare localmente[12] nella forma parametrica

$$w_j = w_j(q_1, \ldots, q_n, t) \ , \qquad j = 1, \ldots, 3N \ , \tag{3.21}$$

ove $w_1 \ldots, w_{3N}$ sono funzioni regolari definite in aperti di $\mathbb{R}^n$, con la proprietà che

$$\text{rango}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right) = n \ . \tag{3.22}$$

Il significato della proprietà (3.22) è che i vettori $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, tangenti alle linee coordinate in un generico punto $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}$, sono una base per lo spazio tangente a $\mathcal{Q}$ in $\mathbf{w}$ (usualmente denotato $T_{\mathbf{w}}\mathcal{Q}$). La parametrizzazione locale ovviamente non è unica; in particolare, se $q_1, \ldots, q_n$ è una scelta possibile per le coordinate libere, e si introducono nuove coordinate $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, legate alle precedenti da una trasformazione regolare e invertibile (diffeomorfismo locale) $q_h = q_h(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n, t)$, allora anche $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ è una scelta possibile per le coordinate libere.[13]

Del tutto in generale, faremo riferimento alla seguente

Definizione 3.2: *Si dice che un sistema di N punti materiali costituisce un sistema olonomo locale a n gradi di libertà ($n \le 3N$), se la sua configurazione $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ è espressa localmente nella forma parametrica (3.21), mediante funzioni w_j regolari soddisfacenti la (3.22).*

Nel linguaggio dei punti materiali, la rappresentazione parametrica (3.21) si esprime nella forma

$$P_i = P_i(q_1, \ldots, q_n, t) \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ . \qquad (3.23) \ .$$

---

[11] In base al teorema della funzione implicita, si possono sempre prendere come coordinate libere n opportune delle coordinate $w_1, \ldots, w_{3N}$; tale scelta tuttavia non è sempre la più conveniente.

[12] Più precisamente, si può trovare un ricoprimento di $\mathcal{Q}$ con aperti, su ciascuno dei quali si dà una rappresentazione parametrica della varietà (detta *carta*); solo in casi eccezionali si può rappresentare $\mathcal{Q}$ con un'unica carta.

[13] L'insieme di tutte le carte regolari di $\mathcal{Q}$ è detto *atlante*.

Un generico vettore tangente alla varietà vincolare $\mathcal{Q}$ (in una sua configurazione istantanea, per un qualunque tempo fissato) verrà denotato con $\delta\mathbf{w}$:

$$\delta\mathbf{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial q_h}\delta q_h \ , \tag{3.24}$$

con δq_h arbitrari;[14] corrispondentemente, per il generico punto materiale si ha

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ , \tag{3.25}$$

e δP_i viene detto *spostamento virtuale* del punto i-esimo.

L'introduzione di r vincoli olonomi per un sistema di N punti materiali conduce, per ogni scelta della parametrizzazione, a un sistema olonomo. La definizione 3.2 è tuttavia significativa anche per un sistema non vincolato; ciò corrisponde formalmente a $r = 0$ (cioè a $n = 3N$), e in tal caso le (3.21) rappresentano semplicemente un cambiamento di coordinate rispetto a quelle cartesiane. Vale anche la pena di osservare che tale definizione ha senso anche per sistemi costituiti da infiniti punti materiali, come i sistemi rigidi continui, la cui configurazione è sempre determinabile (si veda il cap. 2) con $n \leq 6$ parametri indipendenti.[15]

- **Osservazione.** E' del tutto evidente che se abbiamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, l'introduzione di ulteriori r' vincoli, con $r' < n$, conduce ancora ad un sistema olonomo, a $n' = n - r'$ gradi di libertà (ovvero, i vincoli si possono introdurre "in momenti successivi"). Ciò consente ad esempio di trattare agevolmente l'introduzione di vincoli in sistemi di corpi rigidi (cerniere, condizioni di puro rotolamento...).

- **Esempio.** Si consideri un sistema di due punti P_1 e P_2 vincolati a mantenere distanza fissata; il vincolo si esprime nella forma $F = 0$, con $F = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - d^2$. Si hanno dunque $n = 5$ coordinate libere. Una scelta possibile è data dalle tre coordinate cartesiane di P_1, e dai due angoli ϑ e φ delle coordinate sferiche del vettore $(P_2 - P_1)$. Una scelta apparentemente più complicata, in realtà assai più conveniente dal punto di vista delle equazioni di moto che ne conseguono, è quella di prendere, al posto delle coordinate cartesiane di P_1, le coordinate cartesiane del baricentro.

3.2.2 *Vincoli anolònomi; vincoli unilateri*

Per completezza di informazione, facciamo qui cenno ai cosiddetti vincoli *anolonomi*, se non altro per spiegare la terminologia sopra introdotta. Consideriamo

[14] Come già si è accennato per il caso di un solo punto, la (3.24) si può leggere come applicazione tangente (*push–forward*) all'applicazione $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, t)$, per t fissato.

[15] Si noti che la verifica della condizione (3.22) richiede in ogni caso che un minore *finito* $n \times n$ abbia determinante non nullo.

il caso di un singolo vincolo, espresso dall'equazione $F(\mathbf{w}, t) = 0$. Differenziando si ottiene la relazione

$$f_1(\mathbf{w}, t)\, \mathrm{d}w_1 + \cdots + f_{3N}(\mathbf{w}, t)\, \mathrm{d}w_{3N} + f_0(\mathbf{w}, t)\, \mathrm{d}t = 0 \ , \tag{3.26}$$

ove si è posto $f_j = \frac{\partial F}{\partial w_j}$, $f_0 = \frac{\partial F}{\partial t}$; in questa forma, l'equazione del vincolo appare piuttosto come una limitazione agli spostamenti possibili. Questa relazione differenziale è sostanzialmente equivalente all'equazione finita (o intera) $F = 0$, che da essa resta determinata a meno di una costante additiva in F.

Naturalmente, non ogni limitazione agli spostamenti della forma (3.26) dà luogo, per integrazione, a una equazione in forma intera: perché ciò avvenga (almeno localmente), devono essere soddisfatte le condizioni di chiusura $\frac{\partial f_j}{\partial w_k} = \frac{\partial f_k}{\partial w_j}$, $j, k = 0, \ldots, 3N$, eventualmente dopo aver moltiplicato la (3.26) per un fattore integrante.[16] In questo caso il vincolo continua a chiamarsi olonomo;[17] in effetti, la parola "olonomo" significa appunto che il vincolo è eprimibile con una "legge intera" (da ὁλος = intero, νόμος = legge). Vincoli non interi sono chiamati *anolonomi.*[18]

Un esempio di vincolo che si scrive spontaneamente in forma differenziale, ma che tuttavia risulta olonomo, è dato dalla condizione di puro rotolamento di un disco su una guida. Consideriamo un disco di raggio R appoggiato all'asse x; allora la sua configurazione è individuata dalla due coordinate x, φ, dove x è l'ascissa del centro O del disco, coincidente con quella del punto C del disco istantaneamente a contatto con la guida, e φ l'angolo tra un prefissato raggio solidale col disco e la verticale discendente, preso ad esempio in senso antiorario. Se però si impone il vincolo di puro rotolamento (cioè che il punto C del disco abbia velocità nulla) si ha la condizione[19] $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$, o equivalentemente, in forma differenziale, $\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}\varphi = 0$, ovvero

$$\mathrm{d}(x + R\varphi) = 0 \ .$$

La forma differenziale esprimente il vincolo è dunque chiusa, e il vincolo si può anche scrivere nella forma intera

$$x + R\varphi - c = 0 \ ,$$

con una costante arbitraria c. Il sistema è pertanto un sistema olonomo a un grado di libertà, e come coordinata libera è naturale prendere x o, indifferentemente, φ.

Alcuni semplici esempi di vincoli anolonomi sono riportati in appendice.

---

16) Si deve infatti tener conto del fatto che la (3.26) è equivalente a $g_1\,\mathrm{d}w_1 + \cdots + g_0\,\mathrm{d}t = 0$, se si pone $g_j(\mathbf{w}, t) = \lambda(\mathbf{w}, t) f_j(\mathbf{w}, t)$, $i = 0, \ldots, 3N$, con $\lambda(\mathbf{w}, t) \neq 0$. In effetti, perchè alla (3.26) corrisponda una forma intera è necessario e sufficiente che esista F le cui derivate parziali siano proporzionali alle f_j con un fattore λ dipendente dal posto e dal tempo, che viene detto *fattore integrante.*

17) Si usa talora anche l'espressione *semiolonomo.*

18) L'espressione differenziale (3.26) si può riscrivere usando le velocità, precisamente $f_1\dot{w}_1 + \cdots + f_{3N}\dot{w}_{3N} + f_0$, e invita a prendere in considerazione vincoli più generali del tipo $F(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, t) = 0$ (con F non necessariamente lineare in $\dot{\mathbf{w}}$). Tale generalizzazione non presenta però grande interesse.

19) Basta usare la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi, $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \omega \wedge (C - O)$.

Diamo infine un cenno ai cosiddetti vincoli *unilateri*. In alcuni problemi (punto materiale appoggiato a una superficie, pendolo semplice realizzato con un filo flessibile) è interessante introdurre vincoli espressi non, o non solo, da equazioni, come le (3.19), ma anche da disequazioni, del tipo $F^{(s)}(\mathbf{w},t) \geq 0$. In questo caso, si potrebbe vedere, il sistema deve essere trattato in maniera diversa (in particolare, con diverso numero di gradi di libertà), a seconda che si abbia $F^{(s)} > 0$ o $F^{(s)} = 0$. Questi vincoli sono chiamati unilateri; quelli realizzati con sole uguaglianze sono invece chiamati *bilateri*. Nel seguito ci occuperemo soltanto di vincoli bilateri.

3.2.3 Vincoli ideali

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$, e siano le (3.23) le equazioni parametriche, che esprimono la posizione di ciascun punto materiale in funzione delle coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo. Nel determinare il movimento $P_i = P_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, abbiamo dunque le n incognite $q_h(t)$, $h = 1, \ldots, n$. Supponiamo che il sistema si muova, conformemente ai vincoli, sotto l'azione di un sistema di *forze attive* $\mathbf{F}_i$ (che si suppongono essere funzioni note della posizione e della velocità dei punti materiali, ed eventualmente del tempo) e delle *reazioni vincolari* $\mathbf{\Phi}_i$, incognite, tali però da rendere il moto ad ogni istante conforme ai vincoli. Il sistema delle equazioni di Newton per gli N punti materiali si scrive allora

$$m_i \mathbf{a}_i \;=\; \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i \;, \qquad i = 1, \ldots, N \;, \tag{3.27}$$

e si è confrontati con il problema di ottenere, a partire da queste, un sistema di n equazioni che siano pure, cioè non contengano le reazioni vincolari.

E' chiaro allora che il problema resta indeterminato, se non si pongono opportune restrizioni sulla natura delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}$: le (3.27) costituiscono infatti un sistema di $3N$ equazioni scalari, mentre le incognite, si è visto, sono $3N + n$, e quindi mancano n equazioni. Tali equazioni non si possono cercare nei principi generali della dinamica, che abbiamo già usato, ma devono necessariamente provenire da qualche assunzione *a priori* sul tipo di reazioni vincolari che il dispositivo fisico realizzante il vincolo è in grado di produrre. Ciò non stupisce se si pensa che, ad esempio, un punto materiale vincolato a una superficie si muove in modo ben diverso (pur conformemente al vincolo, e a parità di forze attive) a seconda che la superficie sia liscia o in vario modo scabra.

Vediamo dunque alla nozione di *vincolo ideale*, o *perfetto*, nella quale si generalizza al caso di più punti materiali quanto visto nel caso di un solo punto.

Definizione 3.3: *Si dice che un sistema olonomo di N punti materiali è soggetto a vincoli ideali, se l'insieme delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_N$ a priori ammissibili è caratterizzato dalla condizione*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta P_i \;=\; 0 \;, \tag{3.28}$$

per ogni possibile scelta degli spostamenti virtuali $\delta P_1, \ldots \delta P_N$.

In altre parole, si richiede che il dispositivo che fisicamente realizza il vincolo sia in grado di produrre tutte e sole le reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_N$, che compiono "lavoro virtuale" nullo per tutti gli spostamenti virtuali pensabili.

Essendo $\delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h$, per l'arbitrarietà dei δq_h la (3.28) si traduce nelle condizioni indipendenti

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.29}$$

che sono esattamente in numero di n, cioè tante quante ne servono, almeno in linea di principio, per rendere determinato il problema.[20)]

- **Osservazione.** In modo del tutto equivalente, si può far riferimento a tutte le possibili velocità $\mathbf{v}_i^*$ dei punti materiali, a priori compatibili con i vincoli a ogni tempo fissato, dette *velocità virtuali*:

  $$\mathbf{v}_i^* = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot q_h \ ,$$

  con $\dot q_1, \ldots \dot q_n$ arbitrari;[21)] allora i vincoli sono ideali se si annulla la potenza delle reazioni vincolari per tutte le possibili velocità virtuali $\mathbf{v}_i^*$:

  $$\sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{v}_i^* = 0 \ , \qquad \forall \ \mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_N^* \ . \tag{3.30}$$

- **Osservazione.** Si osservi che, nel definire i vincoli ideali, il caso dei vincoli fissi e quello dei vincoli mobili sono stati trattati allo stesso modo, facendo riferimento in ogni caso a spostamenti o velocità virtuali; nel caso dei vincoli mobili, si pensa cioè la varietà vincolare bloccata in ciascuna sua configurazione istantanea, e il tempo t è trattato come un parametro. Vale tuttavia la pena di osservare che, mentre nel caso di vincoli fissi le reazioni vincolari compiono lavoro nullo anche per ogni moto efettivo, invece ciò non avviene nel caso di vincoli mobili: infatti, bisogna tener presente il contributo che al lavoro viene dato dai termini $\frac{\partial P_i}{\partial t}$, che compaiono in $\mathbf{v}_i$ e non in $\mathbf{v}_i^*$. Si pensi, come esempio tipico, a un punto materiale vincolato a un piano che si solleva.

- **Osservazione.** A proposito della definizione di vincolo ideale, vale la pena di sottolineare un fatto che a prima vista può sfuggire. Ragioniamo, per semplicità,

20) In particolare, in assenza di vincoli, gli spostamenti virtuali $\delta P_1, \ldots, \delta P_N$ sono essi stessi indipendenti, e dalla (3.28) si deduce che tutte le reazioni vincolari sono nulle, come ci si aspetta.

21) Le velocità effettive $\mathbf{v}_i = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot q_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}$ differiscono dalle velocità virtuali $\mathbf{v}_i^*$ nel caso di vincoli mobili. Con riferimento alla notazione $\mathbf{w}$ introdotta in precedenza, possiamo dire che per ogni moto compatibile con i vincoli si ha $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^* + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$, con $\mathbf{u}^* = \sum_h \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} \dot q_h = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$ tangente alla varietà vincolare, e $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ in generale trasversale.

nel caso di un punto vincolato a una superficie fissa (cosicchè $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$). La condizione di idealità implica, come si è appena osservato, che per ogni moto effettivo la reazione vincolare non compie lavoro; tuttavia, l'annullarsi del lavoro per ogni moto effettivo non implica l'idealità del vincolo. Bisogna infatti ricordare che la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$, che si accompagna a un assegnato moto, dipende in generale, oltre che dalla posizione, anche dalla velocità $\mathbf{v}$ di quel moto: è chiaro allora che per la idealità non basta imporre $\mathbf{\Phi}(P, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$, ma si deve invece richiedere $\mathbf{\Phi}(P, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = 0$ *per ogni coppia* $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$. Ciò impedisce in particolare di interpretare le forze magnetiche o la forza di Coriolis come reazioni vincolari ideali, benchè (per il fatto di essere perpendicolari alla velocità) esse compiano sempre lavoro nullo, cioè per esse valga $\mathbf{\Phi}(P, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$ per ogni $\mathbf{v}$.

L'esempio più tipico di vincolo ideale è quello di uno o più punti materiali vincolati a superfici o curve lisce, in cui si assume che le reazioni vincolari siano normali alla superficie o alla curva. Vi sono tuttavia esempi di vincoli ideali di carattere alquanto diverso, che non corrispondono all'idea intuitiva di vincolo liscio, come la condizione di puro rotolamento (che anzi richiede coefficiente di attrito infinito[22)]). Un altro esempio importante di vincolo ideale è il vincolo di rigidità, se si assume che esso sia fisicamente realizzato mediante forze interne che soddisfano il principio di azione e reazione e centrali. Consideriamo infatti due punti P_1 e P_2 soggetti al vincolo di mantenere invariata la reciproca distanza. Si ha allora, per definizione, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_1 - P_2)^2 = 0$, e quindi $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0$; d'altra parte, essendo (ad ogni istante), per l'ipotesi delle forze centrali, $\mathbf{\Phi}_1 = -\mathbf{\Phi}_2 = c\,(P_1 - P_2)$, $c \in \mathbb{R}$, si ha che la potenza delle reazioni vincolari è data da $\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = c\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0$. La generalizzazione a $N > 2$ punti è ovvia. Questo esempio mostra in particolare come sia importante richiedere, nella (3.30), che la potenza virtuale *complessiva* delle reazioni vincolari sia nulla, senza che debba essere necessariamente $\mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{v}_i^* = 0$, separatamente per ogni punto.

- **Osservazione.** Il fatto che il vincolo di rigidità sia ideale, ovvero che la potenza delle reazioni vincolari sia nulla, corrisponde al fatto ben noto nell'ambito della meccanica Newtoniana che le forze interne dei sistemi rigidi (a differenza di quanto avviene per sistemi di N punti non rigidi) non contribuiscono all'energia potenziale.

3.2.4 *Energia cinetica, forze generalizzate ed energia potenziale*

Introduciamo qui la notazione abbreviata

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \, , \qquad \dot{\mathbf{q}} = (\dot q_1, \ldots, \dot q_n) \; ; \tag{3.31}$$

le grandezze $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ sono anche dette *velocità generalizzate*. Le equazioni para-

22) La potenza virtuale della reazione vincolare in questo caso è nulla, perchè, comunque sia disposta la reazione vincolare, è nulla la velocità virtuale del suo punto di applicazione, cioè del punto di contatto.

metriche (3.23) forniscono direttamente la velocità $\mathbf{v}_i$ di ciascun punto materiale, precisamente

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}(\mathbf{q},t)\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}(\mathbf{q},t) \ . \tag{3.32}$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica del sistema, si ha la

Proposizione 3.1: *Per un sistema olonomo di N punti materiali, sia*

$$\tilde{T}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i^2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$$

l'energia cinetica espressa in termini delle coordinate libere. Si ha allora

$$\tilde{T} = T_2 + T_1 + T_0 \ , \tag{3.33}$$

con

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q},t)\,\dot{q}_h\dot{q}_k \ , \qquad T_1 = \sum_{h=1}^{n} b_h(\mathbf{q},t)\,\dot{q}_h \ , \qquad T_0 = \frac{1}{2}c(\mathbf{q},t) \ , \tag{3.34}$$

essendo i coefficienti $a_{hk}(\mathbf{q},t)$, $b_h(\mathbf{q},t)$, $c(\mathbf{q},t)$ dati da

$$\begin{aligned} a_{hk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \ , \\ b_h &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t} \ , \qquad c = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t} \ . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Inoltre la matrice $a = (a_{hk})$ è simmetrica e definita positiva.[23)]

La matrice a è chiamata *matrice cinetica*. Una conseguenza particolarmente rilevante del fatto che essa è definita positiva è che essa ha determinante diverso da zero, e dunque è invertibile; questa proprietà sarà invocata più volte nel seguito.[24)] Nel caso particolare, ma importante, in cui le (3.23) non contengano esplicitamente il tempo t (cambio di coordinate indipendente dal tempo, vincoli fissi), si ha $T_1 = T_0 = 0$, cosicché $\tilde{T}$ è una forma quadratica omogenea (definita positiva). Con un innocuo abuso di notazione, nel seguito denoteremo $\tilde{T}$ ancora con T.

---

23) Ricordiamo che una matrice a si dice definita positiva, se risulta $a\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$ (ovvero $\sum_{hk} a_{hk}u_h u_k > 0$) per ogni $\mathbf{u} \neq 0$.

24) La positività di a consente poi di definire una metrica naturale sulla varietà vincolare, ponendo $\mathrm{d}s^2 = \sum_{hk} a_{hk}\mathrm{d}q_h\mathrm{d}q_k$; nel caso di un punto materiale vincolato a una superficie o curva immersa in $\mathbb{R}^3$, si ottiene $\mathrm{d}s = \sqrt{m}\mathrm{d}l$, ove $\mathrm{d}l$ è la lunghezza elementare indotta sulla superficie o curva dalla metrica di $\mathbb{R}^3$. Questo punto di vista sarà ripreso in seguito, nel contesto più adatto dei principi variazionali.

Dimostrazione. Sostituendo l'espressione (3.32) di $\mathbf{v}_i$ nell'energia cinetica, si trova

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big[\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \Big] ;$$

scambiando le sommatorie, e facendo le posizioni (3.35), segue subito per $\tilde{T}$ l'espressione cercata.

Per quanto riguarda le proprietà della matrice cinetica a, la simmetria è evidente, data la simmetria del prodotto scalare. Per dimostrare che è definita positiva, bisogna provare che si ha $T_2 > 0$ per ogni scelta di $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$. Ora, si ha $T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^*$, dove $\mathbf{v}_i^*$ sono le velocità virtuali sopra definite: $\mathbf{v}_i^* = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h$. Dunque si ha $T_2 > 0$ se i vettori $\mathbf{v}_i^*$ sono non tutti nulli, il che è assicurato, in virtù della (3.22), dall'aver supposto $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$. *Q.E.D.*

- **Esercizio 3.4:** Scrivere l'energia cinetica per un punto materiale in coordinate cartesiane, cilindriche e polari sferiche.

  Risposta: nei tre casi si ha[25)]

$$\begin{aligned} T(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\ T(r,\varphi,z,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) \\ T(\rho,\vartheta,\varphi,\dot{\rho},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\vartheta}^2+\rho^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \ . \end{aligned} \tag{3.36}$$

- **Esercizio 3.5:** Scrivere l'energia cinetica per il pendolo sferico di lunghezza R.

  Risposta: basta prendere l'espressione di T in coordinate sferiche, e imporre il vincolo $\rho = R$ (e quindi $\dot{\rho} = 0$); si ottiene

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \ .$$

- **Esercizio 3.6:** Scrivere l'energia cinetica per un sistema di due punti soggetti ai vincoli di giacere su un piano e di mantenere distanza fissata d; si utilizzino come coordinate libere: (a) le coordinate cartesiane x_1, y_1 di P_1 e l'angolo ϑ tra il vettore $P_2 - P_1$ e l'asse x; (b) le coordinate X, Y del baricentro e il medesimo angolo ϑ.

  Risposta:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2[d^2\dot{\vartheta}^2 - 2d(\dot{x}_1\sin\vartheta - \dot{y}_1\cos\vartheta)\dot{\vartheta}] \\ &\text{(b)} \qquad T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\mu\, d^2\dot{\vartheta}^2 \ , \end{aligned}$$

  con $m = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ (massa ridotta).

---

25) Ad esempio, per le coordinate cilindriche, dalla rappresentazione parametrica $P - O = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, si ottiene $\mathbf{v} = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathbf{i} + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$, e il risultato segue con calcoli banali.

- **Esercizio 3.7:** Scrivere l'energia cinetica di un punto materiale vincolato al piano xy, in un sistema cartesiano ruotante uniformemente con velocità angolare ω attorno all'asse z:
$$x(X,Y,t) = X\cos\omega t - Y\sin\omega t \ , \qquad y(X,Y,t) = X\sin\omega t + Y\cos\omega t \ .$$
Risposta: si ha $T = T_2 + T_1 + T_0$, con
$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot X^2 + \dot Y^2) \ , \qquad T_1 = m\omega(X\dot Y - \dot X Y) \ , \qquad T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2(X^2+Y^2) \ .$$

- **Esercizio 3.8:** Scrivere l'energia cinetica per il pendolo centrifugo (ovvero un pendolo semplice, il cui piano di oscillazione ruota uniformemente attorno a un asse verticale passante per il centro).
Risposta: basta considerare l'energia cinetica per il pendolo sferico, e imporre il vincolo $\varphi = \omega t$ (e quindi $\dot\varphi = \omega$); si ottiene
$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot\vartheta^2 + \omega^2\sin^2\vartheta) \ .$$

Veniamo ora alle forze e all'energia potenziale. Si ha la facile

Proposizione 3.2: *Sia $\mathbf{F}_i$ la forza attiva agente sull'i-esimo punto materiale. Allora il "lavoro virtuale" $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i$, corrispondente agli arbitrari spostamenti virtuali $\delta P_i = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h$ assume, in termini delle coordinate libere, l'espressione*
$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h \ , \tag{3.37}$$
con
$$Q_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.38}$$
In particolare, nel caso di forze posizionali conservative, in cui esiste una funzione $V = V(P_1, \ldots, P_N, t)$ tale che $\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V$, si ha
$$Q_h(\mathbf{q}, t) \ = \ -\frac{\partial \tilde V}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.39}$$
dove si è posto $\tilde V(\mathbf{q}, t) = V(P_1(\mathbf{q}), \ldots, P_N(\mathbf{q}), t)$.

Le quantità $Q_1, \ldots, Q_n$ prendono il nome di *forze generalizzate*, o *componenti lagrangiane della sollecitazione.*[26] Con innocuo abuso di linguaggio, la funzione $\tilde V$, che esprime l'energia potenziale in termini delle coordinate libere, verrà solitamente denotata ancora con V.

---

[26] Nel caso di un singolo punto materiale (vincolato o meno) l'espressione di Q_h ha un significato geometrico elementare, poiché rappresenta (a meno di un fattore pari alla norma di $\frac{\partial P}{\partial q_h}$) la componente della forza nella direzione tangente alla h-esima linea coordinata.

Dimostrazione. La (3.37), con l'espressione (3.38) di Q_h, si ottiene immediatamente sostituendo $\delta P_i = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h$ nella definizione del lavoro virtuale, scambiando poi le sommatorie. La (3.39) è immediata conseguenza della formula per la derivazione di una funzione composta. *Q.E.D.*

3.3 Le equazioni di Lagrange

3.3.1 *Deduzione delle equazioni di Lagrange*

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di massa $m_1, \ldots, m_N$, soggetto ad assegnate forze attive $\mathbf{F}_i$, ed eventualmente a vincoli ideali. Si ha allora il sistema delle equazioni di Newton

$$m_i \mathbf{a}_i \;=\; \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ ,$$

dove $\mathbf{\Phi}_i$ sono le reazioni vincolari, incognite esse stesse. L'assunzione che i vincoli siano ideali significa, come si è visto, che l'insieme delle reazioni vincolari ammissibili è caratterizzato dalla condizione $\sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta P_i = 0$ per ogni scelta degli spostamenti virtuali δP_i. Utilizzando le equazioni di Newton, questa condizione prende la forma

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta P_i = 0 \qquad \forall\, \delta P_1, \ldots, \delta P_N \ , \tag{3.40}$$

che a sua volta, ricordando $\delta P_i = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h$, e usando l'arbitrarietà dei δq_h, si traduce nelle n equazioni

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.41}$$

La (3.40) è tradizionalmente chiamata *equazione simbolica pura della dinamica.* Mostreremo ora che essa è sufficiente a determinare sia il moto (si intende per dati iniziali fissati), sia le reazioni vincolari.

Dimostriamo allora la fondamentale

Proposizione 3.3: *Sia dato un sistema olonomo di N punti materiali a n gradi di libertà, soggetto a un assegnato sistema di forze attive $\mathbf{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$, ed eventualmente a vincoli ideali. Allora le coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ soddisfano le equazioni di Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \;=\; Q_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.42}$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione (3.38) delle forze generalizzate Q_h, le (3.41) si scrivono

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = Q_h \ ; \tag{3.43}$$

pertanto la dimostrazione della proposizione si riduce alla verifica della identità

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad\qquad h = 1, \dots, n \tag{3.44}$$

(detta del *binomio lagrangiano*), dove $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è l'energia cinetica, espressa in funzione delle coordinate libere e delle corrispondenti velocità generalizzate, secondo le (3.33), (3.34). Anzi, in virtù dell'additività dell'energia cinetica, $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$, basta verificare la corrispondente identità per un solo punto generico P_i, $1 \le i \le N$:

$$m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T_i}{\partial q_h} \ , \qquad\qquad h = 1, \dots, n \ . \tag{3.45}$$

A tal fine, essendo $\mathbf{a}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$, si usa anzitutto l'identità

$$m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \Big) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \ . \tag{3.46}$$

Si osserva poi che valgono le relazioni[27)]

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_h} \ . \tag{3.47}$$

La prima di queste relazioni segue immediatamente dalla (3.32), $\mathbf{v}_i = \sum_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}$, derivando rispetto a $\dot{q}_h$. Per la seconda, si usa la formula di derivazione di una funzione composta, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \Big) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_h} \ .$$

La conclusione ora è immediata: sostituendo le (3.47) nella (3.46), segue infatti

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} &= m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_h} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) - \frac{\partial}{\partial q_h} (\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T_i}{\partial q_h} \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

---

27) Per ricordare: nella prima, è come se si dividessero per dt numeratore e denominatore; nella seconda, si scambia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ con $\frac{\partial}{\partial q_h}$.

Nel caso particolarmente significativo di forze posizionali derivanti da energia potenziale, come corollario si deduce immediatamente la seguente

Proposizione 3.4: *Per un sistema olonomo a n gradi di libertà, con energia cinetica $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, soggetto a forze conservative derivanti dall'energia potenziale $V = V(\mathbf{q}, t)$, le coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ soddisfano le equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.48}$$

dove $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è definita da

$$L = T - V \ . \tag{3.49}$$

Dimostrazione. Essendo $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = 0$, si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$. Inoltre, essendo come si è già visto $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$, si ha $\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h$. *Q.E.D.*

Si vede dunque che in questo caso le equazioni di Lagrange si esprimono in termini di una sola funzione L, che viene detta *funzione di Lagrange* del sistema, o *lagrangiana.* Useremo a volte per la (3.48) anche la scrittura compatta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \ . \tag{3.50}$$

Si dà anche il caso in cui siano simultaneamente presenti forze conservative, di energia potenziale V, e forze del tutto generiche, corrispondenti alle componenti lagrangiane della sollecitazione Q_h. In tal caso è evidente che le equazioni di Lagrange prendono la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.51}$$

con $L = T - V$.

- **Osservazione.** Si noti che le velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}}$ compaiono nella lagrangiana come variabili indipendenti. La lagrangiana appare dunque come una funzione[28] da $\mathbb{R}^{2n+1}$ in $\mathbb{R}$; la notazione $\dot{q}_h$ non deve trarre in inganno. La situazione è analoga a quella che si presenta nel caso assai familiare dell'equazione di Newton per il moto di un punto su una retta, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, ove $\dot{x}$ compare in f come variabile indipendente.

- **Osservazione** *(Sistemi lagrangiani generali).* Le equazioni di Lagrange (3.48) sono state qui dedotte a partire dalle equazioni di Newton per un sistema di punti materiali, eventualmente soggetti a vincoli olonomi. Equazioni di questa forma sono tuttavia interessanti anche di per sé, e giocano un ruolo importante in tutto il calcolo delle variazioni (si veda oltre, al capitolo sui principi variazionali). In generale, per problemi che esulano dalla meccanica dei sistemi di punti materiali, L non avrà la forma $L = T - V$, con T della forma (3.33), ma potrà essere

---

[28] Più precisamente, in generale $\mathbf{q}$ è definita solo localmente, e dunque si ha $L : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$, e $\mathbf{q} \in U$, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

una funzione qualsiasi delle funzioni incognite, delle loro derivate prime, e della variabile indipendente ($\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e t, nel caso meccanico). I sistemi lagrangiani per cui si può scrivere $L = T - V$, con T della forma (3.33), sono anche chiamati *sistemi lagrangiani naturali*, mentre gli altri sono detti *sistemi lagrangiani generali*.

E' facile mostrare che le equazioni di Lagrange (3.42) hanno la forma di equazioni differenziali del secondo ordine per le incognite $q_1(t), \ldots, q_n(t)$. Infatti, dall'espressione (3.33) di T, si vede immediatamente che si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\ddot{q}_k + g_h \ ,$$

ove g_h è una ben definita funzione delle variabili $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, t, che non contiene $\ddot{\mathbf{q}}$ (in altre parole: i termini contenenti derivate seconde delle q_h provengono solo dal termine T_2, e appaiono nella forma sopra indicata). In effetti, un breve calcolo mostra che g_h ha l'espressione

$$g_h = \sum_{jk}\Big(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h}\Big)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{k}\Big(\frac{\partial b_h}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial t}\Big)\dot{q}_k + \frac{\partial b_h}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q_h} \ . \quad (3.52)$$

Dunque le equazioni di Lagrange (3.42) si presentano nella forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q},t)\ddot{q}_k + g_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ = \ Q_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ , \qquad h = 1,\ldots,n \ .$$

Questo sistema non è in forma normale, ma per l'invertibilità della matrice cinetica a esso è equivalente al sistema in forma normale

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_h = f_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \\ &f_h = \sum_k (a^{-1})_{hk}(Q_k - g_k) \qquad h = 1,\ldots,n \ . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Si deduce allora senza difficoltà la seguente

Proposizione 3.5: *Si consideri un sistema olonomo di N punti materiali a n gradi di libertà, con assegnati dati iniziali di posizione e velocità compatibili con i vincoli. Allora le equazioni di Lagrange (3.42) determinano univocamente il moto $P_i(t)$ dei punti del sistema e le corrispondenti reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_i$ soddisfacenti la condizione di idealità (3.28).*

Dimostrazione. Per la proprietà (3.22), i dati iniziali di posizione e velocità relativi ai punti materiali determinano univocamente i corrispondenti dati iniziali relativi alle coordinate libere $\mathbf{q}$. Pertanto, per il teorema di esistenza e unicità, dalle equazioni di Lagrange in forma normale (3.53) resta determinato il moto $\mathbf{q}(t)$. Sono di conseguenza determinati i moti $P_i = P_i(\mathbf{q}, t)$ dei punti, e in particolare le loro accelerazioni $\mathbf{a}_i(t)$. Le equazioni di Newton consentono allora di calcolare ad ogni tempo le corrispondenti reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_i = m_i\mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** E' possibile riassumere le proposizioni 3.3 e 3.5 nell'unico significativo enunciato:

3.22

Sia dato un sistema olonomo di N punti materiali a n gradi di libertà, soggetto a un assegnato sistema di forze attive $\mathbf{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$; siano assegnate delle condizioni iniziali di posizione e velocità, compatibili con i vincoli. Allora esiste un'unica scelta delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_i$, soddisfacenti la condizione di idealità (3.28), tale che il moto dei punti, soggetti alle equazioni di Newton $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i$, sia compatibile con i vincoli. Tale moto è individuato dalle equazioni di Lagrange (3.42).

- **Osservazione.** Si verifica immediatamente che per sistemi lagrangiani generali, indipendentemente dalla forma di L, le equazioni (3.48) costituiscono comunque un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine per $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, lineare in $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$, precisamente della forma
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + g_h \;=\; 0 \;, \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \;,$$
con un'opportuna $g_h = g_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. La condizione perché tale sistema si possa mettere in forma normale è che il determinante hessiano di L rispetto alle $\dot{q}_h$ non sia nullo,
$$\det\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\Big) \;\neq\; 0 \;. \tag{3.54}$$
Per i sistemi naturali la matrice $\big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\big)$ altro non è che la matrice cinetica $a = (a_{hk})$.

3.3.2 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange

La deduzione stessa delle equazioni di Lagrange, data la scelta del tutto arbitraria delle coordinate libere, porta a concludere che se si effettua un qualsiasi cambiamento di coordinate regolare e invertibile
$$q_h = q_h(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n, t) \;, \qquad h = 1 \ldots, n \;, \qquad\qquad \det\Big(\frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k}\Big) \neq 0 \;, \tag{3.55}$$
ponendo corrispondentemente
$$\dot{q}_h(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k + \frac{\partial q_h}{\partial t} \;, \tag{3.56}$$
allora le equazioni del moto nelle nuove variabili hanno ancora la forma di equazioni di Lagrange, e la nuova lagrangiana $\tilde{L}$ si ottiene da L per semplice sostituzione di variabili:
$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = L\big(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t\big) \;. \tag{3.57}$$
Ciò si esprime dicendo che le equazioni di Lagrange sono *invarianti in forma* per arbitrari cambiamenti di coordinate (regolari e invertibili).

L'invarianza delle equazioni di Lagrange vale in effetti per un sistema lagrangiano generale, e non solo per un sistema naturale (cioè descrivente punti materiali). Si ha infatti la[29)]

Proposizione 3.6: *Sia dato un sistema lagrangiano, di lagrangiana $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$; si consideri un cambiamento di variabili (regolare e invertibile) (3.55), (3.56), e sia $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}},\dot{\tilde{\mathbf{q}}},t)$ la lagrangiana ottenuta da L per sostituzione di variabili, secondo la (3.57). Allora il movimento $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange corrispondenti a $\tilde{L}$, se e solo se il corrispondente movimento $\mathbf{q}(t)$, immagine di $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ attraverso le (3.55), è soluzione delle equazioni di Lagrange corrispondenti a L.*

Dimostrazione. Dall'espressione di $\tilde{L}$, eseguendo le derivate e utilizzando

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}\ , \qquad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}$$

(che seguono immediatamente dalla (3.56)), si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big)\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}\Big)\Big]\ ,$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}\Big]\ .$$

Di conseguenza si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\Big]\frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}\ ,$$

e per l'invertibilità della trasformazione di coordinate $\big($espressa dalla condizione $\det(\partial q_k/\partial \tilde{q}_h) \neq 0\big)$ si vede che le equazioni di Lagrange relative a $\tilde{L}$ sono soddisfatte, se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange relative a L. *Q.E.D.*

Vale la pena di sottolineare qui un altro fatto abbastanza importante, valido anch'esso per sistemi lagrangiani generali, e cioè che diverse lagrangiane possono condurre a identiche equazioni del moto. Precisamente si ha la

Proposizione 3.7: *Per ogni scelta della funzione $F(\mathbf{q},t)$ e della costante reale $c \neq 0$, la lagrangiana $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ e la lagrangiana*

$$L'(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = c\,L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$$

conducono alle medesime equazioni di Lagrange.

Il fatto non banale è che siano equivalenti, per le equazioni del moto che se ne deducono, lagrangiane che differiscono per la derivata totale di una funzione delle $\mathbf{q}$ e

[29)] Nel capitolo sui principi variazionali, vedremo una dimostrazione più semplice, e in un certo senso più naturale, di questa proposizione.

del tempo.[30)]

Dimostrazione. Poniamo

$$L_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \ ;$$

si ha allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h} = \frac{\partial L_0}{\partial q_h} \ ,$$

cioè

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L_0}{\partial q_h} = 0 \ .$$

Inoltre, evidentemente, le equazioni di moto non si alterano se si moltiplica la lagrangiana per un'arbitraria costante $c \neq 0$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Dall'invarianza in forma delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate arbitrari, segue che se il moto di un sistema segue le equazioni di Lagrange in un sistema di coordinate, allora esso segue le equazioni di Lagrange in qualunque altro sistema di coordinate. Ora, è banale verificare direttamente che le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali (non vincolati), scritte nelle usuali coordinate cartesiane, hanno proprio la forma di equazioni di Lagrange, relative a $L = T - V$; di conseguenza, esse mantengono la forma di equazioni di Lagrange, relative alla lagrangiana $\tilde{L}$ trasformata di L, in ogni altro sistema di coordinate. E' questa una deduzione delle equazioni di Lagrange particolarmente semplice e diretta, per sistemi di punti materiali non vincolati descritti in coordinate arbitrarie.

3.3.3 Cenno alla trattazione lagrangiana dei corpi rigidi

Come si è visto sopra (paragrafo 3.2.3), il vincolo di rigidità per un sistema di due o più punti materiali è un caso particolare di vincolo ideale; in particolare dunque le equazioni di Lagrange saranno valide per sistemi meccanici comprendenti uno o più corpi rigidi, liberi o ulteriormente vincolati (ad esempio, corpi rigidi con un punto o un asse fisso, o in vario modo incernierati tra loro), purché costituiti da un numero *finito* di punti materiali. Si pone allora il problema di giustificare l'estensione delle equazioni di Lagrange ai corpi rigidi composti da infiniti elementi, in particolare ai corpi rigidi continui. La questione in sé è delicata, perché, come si è già discusso nel secondo capitolo, non è così facile stabilire che cosa si intenda per dinamica di un sistema di un continuo di punti materiali, soggetti a infiniti vincoli.[31)]

---

30) Anche questa proprietà si comprenderà meglio nel contesto dei principi variazionali.

31) Si tratta di un problema generale, relativo a tutta la dinamica dei corpi continui e alla sua eventuale "deduzione" dalla dinamica dei sistemi a un numero finito di punti.

Una prima osservazione che si deve fare a questo proposito è che nell'espressione dell'energia cinetica e potenziale di un corpo rigido,[32] e dunque della lagrangiana in funzione delle coordinate libere e delle corrispondenti velocità generalizzate, la particolare struttura del corpo interviene soltanto attraverso gli elementi di geometria delle masse (operatore d'inerzia, baricentro...), che lo caratterizzano. In particolare, qualunque modello in cui il corpo continuo sia pensato come limite di una successione di sistemi rigidi discreti, con fissata geometria delle masse, e fissata energia potenziale come funzione delle coordinate libere, conduce, anche al limite, alle medesime equazioni di Lagrange.

In effetti, lo stesso problema si pone già a livello di meccanica newtoniana, al momento di accettare la validità delle equazioni cardinali per i sistemi rigidi continui (la cui deduzione implica, in questo caso, la non banale operazione di eliminazione di infinite forze interne). I due problemi sono identici, e anzi, non è difficile convincersi che, se si accetta (nella sostanza, si postula) la validità delle equazioni cardinali per i corpi rigidi continui, le equazioni di Lagrange seguono poi senza ulteriori ipotesi.[33]

E'un facile e utile esercizio verificare in casi particolari che le equazioni di Lagrange sono equivalenti alle equazioni cardinali.

- **Esempio.** Si consideri un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse fisso. Si ha allora, con ovvio significato dei simboli, $T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, mentre l'energia potenziale è una funzione $V(\varphi)$, caratterizzata da $N = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}$, dove N è la proiezione, sull'asse di rotazione, del momento risultante rispetto a un punto dell'asse (che non dipende dalla scelta del punto). Dalla lagrangiana $L = T - V$ si ottiene allora l'equazione di Lagrange
$$I\ddot{\varphi} - N = 0 \ ,$$
che coincide con l'equazione cardinale per il momento angolare, proiettata sull'asse di rotazione.

- **Esempio.** Si consideri il moto di puro rotolamento di un disco omogeneo su di una guida rettilinea. In assenza di vincolo si avrebbe (con ovvio significato dei simboli) energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, ed energia potenziale $V = V(x,\varphi)$; se denotiamo con F la proiezione del risultante sull'asse x, e con N la proiezione, nella direzione normale al piano del disco, del momento risultante delle forze esterne, relativo al centro del disco, allora si ha $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $N = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$. Introducendo il vincolo di puro rotolamento $x = x_0 - R\varphi$, si ottiene allora $L = \frac{1}{2}(mR^2 + I)\dot{\varphi}^2 - V(x_0 - R\varphi, \varphi)$. Nella corrispondente equazione di Lagrange
$$(mR^2 + I)\ddot{\varphi} + RF - N = 0 \ ,$$
si riconosce immediatamente l'equazione cardinale per il momento angolare, relativo a un punto qualunque Q della guida (proiettata sulla direzione normale al piano del disco).

---

[32] Si ricordi che, come si è osservato nel Capitolo 2, per i sistemi rigidi le forze interne non contribuiscono all'energia potenziale.

[33] Nella sostanza: per sistemi rigidi con un numero finito di punti, sia le equazioni di Lagrange sia le equazioni cardinali sono conseguenza delle equazioni di Newton, e sono sufficienti a determinare la dinamica; dunque esse sono tra di loro equivalenti. D'altra parte, in tali equazioni il numero di punti non appare esplicitamente, pertanto esse sono equivalenti del tutto in generale.

3.4 Le equazioni di Hamilton

3.4.1 Deduzione delle equazioni

Studieremo in questo paragrafo un modo di passare dal sistema delle n equazioni del secondo ordine di Lagrange (3.48) a un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine *in forma normale*, diverso da quello tradizionale, e in un certo senso più spontaneo e suggerito dalla forma stessa delle equazioni. Questo metodo, già iniziato da Lagrange e Poisson, conduce alle cosiddette equazioni di Hamilton, o *equazioni canoniche*, il cui studio costituisce uno dei capitoli più interessanti e ricchi di sviluppi della fisica matematica. Infatti, Hamilton stesso giunse a queste equazioni (1824) considerando una profonda analogia tra la meccanica e l'ottica; inoltre, il formalismo hamiltoniano risulta fondamentale per fondare la meccanica statistica (teorema di Liouville) e per il passaggio dalla meccanica classica alla meccanica quantistica. Nel presente capitolo ci limiteremo tuttavia all'aspetto analitico che corrisponde a riguardare le equazioni di Hamilton sostanzialmente come una significativa riscrittura delle equazioni di Lagrange.

Il metodo "ordinario" per passare a un sistema di $2n$ equazioni del primo ordine in forma normale è il seguente: anzitutto si portano le equazioni di Lagrange stesse in forma normale, come abbiamo fatto scrivendo le equazioni (3.53), e poi si passa a un sistema di un numero doppio di equazioni del primo ordine col procedimento consueto di introdurre n nuove variabili, diciamo η_h, $h = 1, \ldots, n$, ponendo $\dot{q}_h = \eta_h$. Questo metodo tuttavia non è sempre il più conveniente, come abbiamo avuto modo ad esempio di constatare nel caso dell'equazione di Van der Pol.[34)]

Ora, la forma stessa delle equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.58}$$

suggerisce un metodo diverso; si introducono nuove variabili $p_1, \ldots, p_n$ (dette *momenti coniugati* alle coordinate generalizzate $q_1, \ldots, q_n$) mediante la definizione

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.59}$$

sicché le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.60}$$

Il problema è allora se si possa riguardare alla definizione (3.59) dei momenti p_h come a un sistema implicito di n equazioni per le $\dot{q}_h$. In effetti, in base alle (3.59) le variabili

---

34) Si tratta, ricordiamo, dell'equazione $\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$. Riscrivendola nella forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x} + \beta(x^3/3 - x)] + x = 0$, è spontaneo porre $y = \dot{x} + \beta(x^3/3 - x)$, o anche, come si fa per successiva convenienza, $\beta y = \dot{x} + \beta(x^3/3 - x)$. Si ottiene immediatamente il sistema in forma normale

$$\dot{x} = \beta[y - (x^3/3 - x)] \ , \qquad \dot{y} = -\beta^{-1}x \ .$$

$p_1, \ldots, p_n$ sono funzioni di $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e t, che possiamo indicare con $p_h = p_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Ora, questo sistema è invertibile rispetto a $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, se la matrice $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right)$ ha determinante diverso da zero, cioè se è soddisfatta la condizione (3.54). Per i sistemi naturali tale matrice coincide con la matrice cinetica a, e dunque l'invertibilità delle (3.59) è sempre assicurata; precisamente, le (3.59) hanno la forma

$$p_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k + b_h \ . \tag{3.61}$$

Pertanto, se $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$, dalla definizione (3.59) delle p_h si ottengono n equazioni in forma normale

$$\dot{q}_h \ = \ \dot{q}_h(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \ , \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ ; \tag{3.62}$$

le altre n equazioni sono le equazioni stesse di Lagrange (3.60), che usando le (3.62) per sostituire $\dot{\mathbf{q}}$ tra gli argomenti di $\frac{\partial L}{\partial q_h}$, prendono anch'esse la forma normale

$$\dot{p}_h \ = \ \dot{p}_h(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \ , \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.63}$$

L'interesse per questo modo di procedere sta nel fatto che le $2n$ equazioni (3.62), (3.63) così ottenute hanno in realtà una struttura molto particolare e simmetrica, ricca di grosse conseguenze. Precisamente, si ha la

Proposizione 3.8: *Si consideri una lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, con determinante hessiano non nullo: $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$. Allora il sistema*

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \tag{3.64}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \ , \end{cases} \tag{3.65}$$

dove $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ è la funzione definita da[35)]

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \Big[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\Big]_{\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)} \ , \tag{3.66}$$

essendo la funzione $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ definita per inversione della prima delle (3.64). Inoltre si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

La funzione H si dice *funzione di Hamilton*, o *hamiltoniana* del sistema, e le equazioni (3.65) si dicono *equazioni canoniche* o *di Hamilton.* Si osservi che il sistema (3.64) è dato dalla coppia di equazioni (3.59), (3.60), equivalenti alle equazioni di Lagrange originali (3.58); la proposizione stabilisce dunque l'equivalenza tra le equazioni di Lagrange e le equazioni di Hamilton, nel caso di determinante hessiano non nullo.

---

35) Si denota $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per l'ipotesi sul determinante hessiano, l'inversione della prima delle (3.64) nella forma $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ è possibile, sicché l'hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ è ben definita. Si fa poi uso di una proprietà elementare del differenziale,[36] secondo la quale nel differenziare una funzione composta si può procedere formalmente come se le variabili da cui essa dipende, a loro volta dipendenti da altre variabili, fossero invece indipendenti. Differenziando H definita dalla (3.66) si ha dunque

$$\mathrm{d}H = \mathbf{p} \cdot \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \ ,$$

e i due termini che sono coefficienti di $\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}$ si cancellano per la definizione stessa di $\mathbf{p}$. D'altra parte, pensando H come funzione di $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$, per definizione di differenziale si ha

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \ ,$$

cosicché per confronto si ottiene

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \ , \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \ , \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \ . \tag{3.67}$$

Di queste equazioni, la prima coincide con la prima delle (3.65); la seconda, introdotta nella seconda delle (3.64), fornisce la seconda delle (3.65). *Q.E.D.*

Risulta poi che la funzione hamiltoniana di un sistema meccanico è strettamente connessa con l'energia. Si ha infatti la

Proposizione 3.9: *In un sistema meccanico naturale l'hamiltoniana H ha l'espressione*

$$H = T_2 - T_0 + V \ , \tag{3.68}$$

dove T_2, T_0 sono i termini dell'energia cinetica T, rispettivamente di ordine due e zero nelle velocità $\dot{\mathbf{q}}$, riespressi in funzione di $\mathbf{p}, \mathbf{q}, t$; in particolare nel caso indipendente dal tempo si ha

$$H = T + V \ . \tag{3.69}$$

Vediamo dunque che, *nel caso indipendente dal tempo, l'hamiltoniana coincide con l'energia totale del sistema* (espressa in funzione delle coordinate libere e dei momenti coniugati). Questo risultato insegna la via pratica, davvero semplice, per costruire la funzione hamiltoniana H nel caso indipendente dal tempo: basta scrivere l'energia totale $T + V$, con la sola avvertenza di esprimere T in termini di $\mathbf{p}$ anziché di $\dot{\mathbf{q}}$. Analogamente si procede nel caso generale, usando la (3.68).

---

[36] Tale proprietà è detta anche *teorema di invarianza del differenziale primo.*

Dimostrazione. Dall'espressione (3.33) dell'energia cinetica, $T = T_2 + T_1 + T_0$, con T_2, T_1 e T_0 di grado rispettivamente due, uno e zero in $\dot{\mathbf{q}}$, segue immediatamente[37)]

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 2T_2 + T_1 \ ;$$

dunque, essendo $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, si ottiene subito la (3.68). Nel caso indipendente dal tempo, essendo $T_0 = 0$, $T_2 = T$, si ha la (3.69). *Q.E.D.*

3.4.2 Trasformata di Legendre

Mostriamo qui come sia in realtà spontaneo introdurre la funzione di Hamilton H. Per comprendere ciò nel caso più semplice, consideriamo una funzione di due variabili $f(x, y)$, dove f tiene il posto di L, x tiene il posto di $\dot{q}$, mentre y tiene il posto di q e t. Introducendo la nuova variabile (analoga alla $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$)

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \ , \tag{3.70}$$

si vuole passare dalle variabili (x, y) alle variabili (u, y). A tal fine occorre anzitutto richiedere che la relazione (3.70) sia invertibile, sicché si possa scrivere

$$x = x(u, y) \ ; \tag{3.71}$$

la condizione che garantisce ciò è che u sia monotòna come funzione di x, ovvero si abbia $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$, cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \tag{3.72}$$

(f concava o convessa in x; nel caso di più variabili l'analoga condizione è che l'hessiano di f rispetto alle variabili da eliminare non sia nullo). Consideriamo allora il differenziale di f,

$$\mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad\qquad (u = \frac{\partial f}{\partial x}) \ ; \tag{3.73}$$

volendo prendere u come variabile indipendente in luogo di x, è spontaneo usare l'identità

$$u\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ux) - x\mathrm{d}u$$

e scrivere la (3.73) nella forma

$$\mathrm{d}(f - ux) = -x\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \ .$$

E' pertanto naturale introdurre la trasformata di Legendre g di f, definita da[38)]

$$g(u, y) = \big[ux - f(x, y)\big]_{x = x(u,y)} \ , \tag{3.74}$$

---

37) E' questo un caso particolare del cosiddetto *teorema di Eulero* sulle funzioni omogenee, in base al quale, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ è omogenea di grado k, allora si ha $\mathbf{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = kf$.

38) Spesso viene chiamata *trasformata di Legendre* di f la funzione $-g$ anzichè la funzione g.

il cui differenziale è

$$\mathrm{d}g = x\mathrm{d}u - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \ ;$$

da questa espressione, per confronto con $\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y$, si deduce

$$x = \frac{\partial g}{\partial u} \ , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \ . \tag{3.75}$$

Si noti la simmetria tra la (3.70) e la prima delle (3.75): le variabili in gioco, x ed u, si ottengono per derivazione di g ed f rispetto alle corrispondenti variabili; la seconda delle (3.75) si legge dicendo che le derivate rispetto alle variabili non in gioco (y) sono uguali a meno del segno. Una conseguenza immediata di questa simmetria è che applicando a g la trasformata di Legendre, per passare dalle variabili (u, y) alle variabili (x, y), si ritrova f: si verifica infatti immediatamente che, se $u = u(x, y)$ è la relazione che inverte $x = \frac{\partial g}{\partial u}$, allora si ha $\big[ux - g(u, y)\big]_{u=u(x,y)} = f(x, y)$. Così, la trasformata di Legendre di H è nuovamente L.[39)]

Vale la pena di ricordare le applicazioni della trasformata di Legendre alle funzioni termodinamiche (con qualche diversità nei segni, dovuta alla tradizione): ad esempio $U = U(S, V)$, $T = \frac{\partial U}{\partial S}$, $F = U - TS$; oppure: $p = -\frac{\partial U}{\partial V}$, $H = U + pV$.

- **Osservazione.** Incontreremo più avanti (si veda il capitolo sulle trasformazioni canoniche) sistemi hamiltoniani — cioè sistemi di equazioni differenziali della forma (3.65) — in cui però la funzione di Hamilton è una funzione generica di $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e t, con hessiano (rispetto a $\mathbf{p}$) non necessariamente diverso da zero. In tal caso non si può applicare la trasformata di Legendre, e associare all'hamiltoniana una lagrangiana equivalente.

3.4.3 *Spazio degli stati, spazio delle fasi, trasformazioni puntuali estese*

Nello studio dei sistemi olonomi abbiamo fatto riferimento innanzitutto allo *spazio delle configurazioni* $\mathcal{Q}$ a n dimensioni, con coordinate locali $q_1, \ldots, q_n$. L'introduzione del formalismo lagrangiano porta poi a considerare uno spazio a $2n$ dimensioni, con coordinate locali $q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n \in U \times \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$; si potrebbe vedere che tale spazio ha una struttura geometrica globale, detta *fibrato tangente* a $\mathcal{Q}$ (denotato abitualmente con $T\mathcal{Q}$). Converremo di chiamare tale spazio *spazio degli stati*; un nome tradizionale è anche *spazio degli atti di moto.*

Infine, l'introduzione del formalismo hamiltoniano porta a considerare un secondo spazio a $2n$ dimensioni, con coordinate locali $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n \times U$, $U \subset \mathbb{R}^n$; si potrebbe vedere che tale spazio ha a sua volta una struttura geometrica globale, detta *fibrato cotangente* a $\mathcal{Q}$ (denotato con $T^*\mathcal{Q}$). Tale spazio viene chiamato *spazio delle fasi.* Uno stato del sistema è dunque individuato da un punto nello spazio degli

[39)] La trasformata di Legendre si dice *involutoria,* appellativo riservato alle trasformazioni o operazioni (si pensi alle riflessioni) il cui quadrato è l'identità.

stati, o dello spazio delle fasi, a seconda dell'ambito cui ci si riferisce; funzioni definite nell'uno o nell'altro spazio sono chiamate *variabili dinamiche*.

Sia data ora una trasformazione di coordinate[40)]

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}) \tag{3.76}$$

nello spazio delle configurazioni. Abbiamo già visto che a tale trasformazione corrisponde la trasformazione $\dot{q}_h = \sum_k \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k$ per le velocità generalizzate; in altre parole la trasformazione (3.76) nello spazio delle configurazioni induce naturalmente una trasformazione nello spazio degli stati, data da

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}) \ , \qquad \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \ , \qquad J = \left(\frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k}\right) \ . \tag{3.77}$$

Come si è dimostrato, la forma delle equazioni di Lagrange è invariante sotto una trasformazione di questo tipo.

Allo stesso modo, si può vedere che la trasformazione (3.76) induce nello spazio delle fasi una trasformazione data da

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}) \ , \qquad \mathbf{p} = (J^T)^{-1}\tilde{\mathbf{p}} \tag{3.78}$$

(dove J^T indica la trasposta di J). Un modo semplice di dedurre[41)] la (3.78) è quella di verificare che *per ogni scelta* della lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ la seconda delle (3.78) è equivalente alla seconda delle (3.77), non appena si ponga $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ e corrispondentemente $\tilde{\mathbf{p}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}$, ove $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))$ è la lagrangiana trasformata. Infatti, eseguendo la derivata si trova

$$\tilde{p}_h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} p_k \ ,$$

e la conclusione è immediata. Le (3.77) e (3.78) sono dette *trasformazioni puntuali estese*.

Al pari delle equazioni di Lagrange, le equazioni di Hamilton risultano invarianti per trasformazioni puntuali estese. Ciò è evidente per il modo stesso in cui tali equazioni sono state dedotte a partire dalle equazioni di Lagrange, in virtù dell'invarianza di queste ultime, e comunque potrebbe essere verificato direttamente. Nel prossimo capitolo considereremo una classe più ampia di trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi *(trasformazioni canoniche)*, che, diversamente da quelle puntuali estese, rimescolano più liberamente coordinate configurazionali e momenti coniugati, e anzi in qualche modo conducono a ignorare ogni distinzione tra tali variabili. Queste trasformazioni saranno proprio caratterizzate dalla proprietà di lasciare invariate in forma le equazioni di Hamilton.

---

40) Per semplicità consideriamo qui il solo caso indipendente dal tempo; la generalizzazione è immediata.

41) La verifica si potrebbe compiere anche in modo intrinseco, rifacendosi alla definizione stessa di spazio cotangente.

3.5 Semplici esempi

Diamo qui di seguito alcuni esempi elementari di sistemi lagrangiani e hamiltoniani, cominciando dal problema di un punto materiale nello spazio in vari sistemi di coordinate.

Punto materiale in coordinate cartesiane x, y, z.

L'energia cinetica T, espressa in funzione delle velocità lagrangiane $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, è evidentemente $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; per i momenti coniugati p_x, p_y, p_z si ha allora $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$, e dunque, con banale inversione $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ e analoghe, si ottiene per l'energia cinetica T la forma $T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$. Se $V(x, y, z)$ è l'energia potenziale, la lagrangiana e l'hamiltoniana sono allora

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \\ H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \ . \end{aligned}$$

Punto materiale in coordinate cilindriche r, φ, z.

Si è fià visto che si ha $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$. I momenti coniugati p_r, p_φ, p_z sono allora dati da $p_r = m\dot{r}$, $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$, $p_z = m\dot{z}$, cosicchè, ancora con banali inversioni, si ha $T = \frac{1}{2m}(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 + p_z^2)$. Indicando ancora con V l'energia potenziale, espressa però in funzione delle variabili r, φ, z, si ha allora

$$\begin{aligned} L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \varphi, z) \\ H(p_r, p_\varphi, p_z, r, \varphi, z) &= \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2) + V(r, \varphi, z) \ . \end{aligned}$$

Punto materiale in coordinate sferiche ρ, ϑ, φ.

In modo analogo, dalla definizione delle coordinate $x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$, si ottiene

$$\begin{aligned} L(\rho, \vartheta, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(\rho, \vartheta, \varphi) \\ H(p_\rho, p_\vartheta, p_\varphi, \rho, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2\sin^2\vartheta}) + V(\rho, \vartheta, \varphi) \ . \end{aligned}$$

- **Osservazioni.**

a) In questi esempi, l'energia cinetica non contiene termini misti (la matrice cinetica è diagonale), grazie al fatto che le linee coordinate si intersecano ortogonalmente; un esempio banale in cui ciò non avviene è quello delle coordinate cartesiane oblique.

b) In generale, in sistemi di coordinate ortogonali, l'energia cinetica ha dunque la forma diagonale $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_h a_h(\mathbf{q})\dot{q}_h^2$; corrispondentemente, è immediato constatare che si ha sempre $T(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_h \frac{p_h^2}{a_h(\mathbf{q})}$, come negli esempi sopra riportati.

c) Si osservi il diverso significato fisico dei momenti coniugati nei tre sistemi di coordinate sopra considerati. Nel caso delle coordinate cartesiane essi rappresentano le componenti della quantità di moto; nel caso delle coordinate cilindriche, ciò resta vero per p_r e p_z, mentre p_φ è la componente del momento angolare lungo l'asse z, che è l'asse di rotazione associato alla coordinata angolare φ. Nel caso delle coordinate sferiche, si ha analogamente che p_ρ è la componente radiale della quantità di moto, e p_φ è ancora la componente z del momento angolare. In generale, dalla circostanza che il prodotto $p_h q_h$ ha le dimensioni di una azione, segue subito che, se q_h ha le dimensioni di una lunghezza, allora p_h ha le dimensioni di una quantità di moto, mentre se q_h è un angolo, p_h ha le dimensioni di un momento angolare.

Problema a due corpi.

Consideriamo il caso particolarmente significativo di forze interne centrali a simmetria sferica, e dunque provenienti da un'energia potenziale $V(\rho)$, con $\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$; in coordinate cartesiane si ha allora $L(x_1, y_1, \ldots, z_2, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_2) = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(\rho)$. E' tuttavia conveniente passare dalle coordinate cartesiane dei due punti a nuove coordinate $X, Y, Z, \rho, \vartheta, \varphi$, ove X, Y, Z sono le coordinate cartesiane del baricentro, e ρ, ϑ, φ le coordinate sferiche del vettore relativo $P_2 - P_1$. Si verifica allora che L e H sono date da

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(\rho) \\
H &= \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{1}{2\mu}(p_\rho^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2\sin^2\vartheta}) + V(\rho)\ ,
\end{aligned}
$$

ove m e μ denotano la massa totale e la massa ridotta.

Semplici esempi di punto materiale vincolato.

Per tutti i problemi di punto vincolato a una retta, ad esempio l'asse x, è sufficiente considerare il caso sopra riportato delle coordinate cartesiane, imponendo i vincoli $y = 0$, $z = 0$ (e corrispondentemente $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$); ad esempio, per l'oscillatore armonico unidimensionale si ha

$$
L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\ , \qquad H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\ .
$$

In modo analogo, per il pendolo semplice nel piano verticale xy, con l'asse y verticale ascendente, si usano coordinate cilindriche r, φ, z, imponendo i vincoli $z = 0$, $r = l$. Misurando, come è consueto in questo problema, l'angolo φ a partire dalla direzione negativa dell'asse y, l'energia potenziale della forza peso è allora

$V = mgy = -mgl\cos\varphi$; si ha così

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \ , \qquad H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi \ ,$$

dove si è denotato $p = p_\varphi$. Nonostante la massa m appaia nella lagrangiana, tuttavia l'equazione del moto del pendolo non ne dipende.[42)]

Infine, è facile vedere (usando coordinate polari, e imponendo il vincolo $\rho = R$) che per il pendolo sferico si ha

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + mgR\cos\vartheta \ , \qquad H = \frac{1}{2mR^2}(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}) - mgR\cos\vartheta \ ,$$

dove si è preso l'angolo ϑ a partire dalla direzione negativa dell'asse z.

3.6 Potenziali dipendenti dalla velocità. Trattazione lagrangiana e hamiltoniana

Dopo aver scritto le equazioni di Lagrange nella forma generale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \ , \tag{3.79}$$

si è visto che nel caso di forze posizionali derivanti da potenziale, per le quali si ha

$$Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \ , \tag{3.80}$$

le equazioni assumono la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \ , \tag{3.81}$$

con $L = T - V$. E' chiaro però che ci si può ridurre alla forma (3.81) anche nel caso di forze dipendenti dalla velocità, se esiste una funzione $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ tale che sia soddisfatta la condizione, che generalizza la (3.80),

$$Q_h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \ ; \tag{3.82}$$

infatti, si vede allora immediatamente che la (3.79) e la (3.82) implicano ancora la (3.81).

[42)] In effetti, come abbiamo già osservato, le equazioni di moto non si alterano se si moltiplica la lagrangiana per una costante. Qui è spontaneo dividere la lagrangiana per ml^2; modificando coerentemente la definizione del momento coniugato (cioè ponendo $p = \dot{\varphi}$), possiamo dunque prendere $L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos\varphi$ e $H = \frac{1}{2}p^2 - \omega^2\cos\varphi$, con $\omega^2 = g/l$.

3.6.1 Un esempio: la forza di Coriolis

Il caso più familiare in cui tale circostanza si verifica è quello della forza di Coriolis

$$\mathbf{F} \,=\, 2m\,\dot{\mathbf{q}}\wedge\boldsymbol{\omega}\ , \tag{3.83}$$

che interviene nello studio del moto di un punto materiale in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ (che qui per semplicità supponiamo costante). Come sappiamo, un modo di procedere consiste nel trattare il sistema di coordinate rotante come se fosse inerziale, pur di aggiungere alle forze "vere" eventualmente presenti le forze inerziali, in questo caso la forza centrifuga e la forza di Coriolis data dalla (3.83). La forza centrifuga è una forza posizionale conservativa, descritta dal potenziale $V_c(\mathbf{q}) \,=\, -\frac{1}{2}m\omega^2 d^2$, dove $d \,=\, d(\mathbf{q})$ è la distanza del punto materiale dall'asse di rotazione; se $\tilde{V}(\mathbf{q})$ denota il potenziale delle altre forze posizionali eventualmente presenti, allora $V_0 = \tilde{V} + V_c$ è il potenziale complessivo delle forze posizionali. Per quanto riguarda la forza di Coriolis, si ha invece la seguente

Proposizione 3.10: *La forza di Coriolis (3.83), con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ costante, si deduce, attraverso la (3.82), da un potenziale $V_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, lineare in $\dot{\mathbf{q}}$, dato da*

$$V_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = -m\,\dot{\mathbf{q}}\wedge\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{q}\ . \tag{3.84}$$

Dimostrazione. Dall'espressione di V_1 si ottiene immediatamente

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = -m(\dot{\mathbf{q}}\wedge\boldsymbol{\omega})_h\ ,$$

e inoltre (osservando che per le note proprietà del prodotto misto si può scrivere $V_1 = -m\dot{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{q}$)

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{q})_h\ , \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{q}})_h\ ;$$

la conclusione è immediata. *Q.E.D.*

La lagrangiana del sistema è dunque

$$L = T - V_0 - V_1\ , \tag{3.85}$$

ove $T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$ è l'energia cinetica, come essa appare nel sistema rotante.

- **Esercizio 3.9:** Verificare che la lagrangiana (3.85), con V_1 della forma (3.84), è la lagrangiana del punto materiale in un sistema di riferimento rotante, anche nel caso di ω non costante (precisamente, in questo caso il termine V_1 produce anche il termine aggiuntivo $m\dot{\omega}\wedge(P-O) = m\dot{\omega}\wedge\mathbf{q}$, che compare nella parte di trascinamento della forza fittizia).

A proposito della forza di Coriolis ricordiamo che, come si è già osservato, il modo più naturale e conveniente di trattare i sistemi di coordinate rotanti all'interno del formalismo lagrangiano, senza introdurre le forze inerziali e i loro potenziali, consiste semplicemente nell'introdurre un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo. Nell'esempio che stiamo seguendo, se x_1, x_2, x_3 sono coordinate cartesiane in un sistema di riferimento inerziale, allora il cambio di coordinate è dato da

$$x_1 = q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t \ , \qquad x_2 = q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t \ , \qquad x_3 = q_3$$

(le due origini si sono assunte coincidenti, e si è preso l'asse x_3 come asse di rotazione). L'energia cinetica è ora data da $\tilde{T} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$; sviluppando i quadrati si trova $\tilde{T} = \tilde{T}_2 + \tilde{T}_1 + \tilde{T}_0$, con

$$\tilde{T}_2 = T \ , \qquad \tilde{T}_1 = -V_1 \ , \qquad \tilde{T}_0 = -V_c \ .$$

Pertanto la lagrangiana $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{V}$ coincide con L. E' interessante osservare che gli stessi termini della lagrangiana appaiono in un caso come cinetici, nell'altro come potenziali. Altre volte si ottengono, procedendo nel modo più spontaneo, lagrangiane non identiche, ma differenti per un termine del tipo $L_0 = \frac{\mathrm{d}}{t}F$ (con $F(\mathbf{q}, t)$ opportuna), e dunque, come si è visto, equivalenti.

3.6.2 *Forze elettromagnetiche*

Il secondo e più importante esempio, in cui intervengono potenziali dipendenti dalle velocità, è quello della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = e\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) \ , \tag{3.86}$$

che determina il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico.[43] Come è noto, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e l'induzione magnetica $\mathbf{B}$ sono deducibili dal potenziale scalare ϕ e dal "potenziale vettore" $\mathbf{A}$ nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = -\left(\mathrm{grad}\,\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \ , \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \ . \tag{3.87}$$

La somiglianza della parte magnetica della forza di Lorentz con la forza di Coriolis è evidente;[44] pertanto, nel caso in cui il campo magnetico sia uniforme e costante (corrispondentemente alla scelta di $\boldsymbol{\omega}$ costante), possiamo senz'altro concludere che la forza di Lorentz si deduce, attraverso la (3.82), dal potenziale $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -e(\phi + \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B} \cdot \mathbf{q})$. Il caso generale si tratta agevolmente mediante il potenziale vettore: vale infatti la seguente

Proposizione 3.11: *La forza di Lorentz (3.87) si deduce, attraverso la (3.82), dal potenziale (lineare in $\dot{\mathbf{q}}$)*

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = e\phi - e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} \ . \tag{3.88}$$

---

[43] Seguiamo qui il sistema *MKSA,* di uso comune nei testi di fisica generale; nei testi di fisica teorica è più frequente l'uso del sistema *cgs,* nel quale $\mathbf{B}$ è sostituito da $\mathbf{H}/c$.

[44] Si noti in particolare come la $\mathbf{B}$ sia così, in qualche modo, associato alle rotazioni, secondo l'intuizione originaria di Maxwell.

- **Osservazione.** Il vettore $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{q}}$ si interpreta come *corrente* associata al moto della carica e con velocità $\dot{\mathbf{q}}$. Come la carica si accoppia al potenziale scalare ϕ, così la corrente si accoppia al potenziale vettore $\mathbf{A}$ (e verrebbe spontanea la riscrittura della (3.88) in forma di prodotto scalare tra vettori a quattro componenti, come nella teoria della relatività).

Dimostrazione. Usando i potenziali, la forza di Lorentz prende la forma

$$\mathbf{F} = -e\left(\mathrm{grad}\,\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + e\dot{\mathbf{q}} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\ ; \tag{3.89}$$

basta allora dimostrare che il membro di destra della (3.89) coincide con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$, ove V è dato dalla (3.88). La verifica è semplice: derivando si trova

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = -eA_h\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = -e\Big(\frac{\partial A_h}{\partial t} + \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big)\ , \quad \frac{\partial V}{\partial q_h} = e\Big(\frac{\partial \phi}{\partial q_h} - \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial q_h}\Big)\ ,$$

e dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = -e\Big(\frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t}\Big) + e\sum_k \dot{q}_k \Big(\frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big)\ .$$

Si vede ora facilmente, per l'ultimo termine, che vale[45)]

$$\sum_k \dot{q}_k \Big(\frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big) = (\dot{\mathbf{q}} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{A})_h\ \ ,$$

e ciò conclude la dimostrazione. *Q.E.D.*

Pertanto, la lagrangiana di una particella di massa m e carica e in un campo elettromagnetico è

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\phi\ . \tag{3.90}$$

3.6.3 Trattazione hamiltoniana della particella in campo elettromagnetico

Dalla definizione di momento coniugato $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$, applicata alla lagrangiana (3.90) della particella carica in campo elettromagnetico, si ha

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + e\,\mathbf{A}\ , \qquad\qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p} - e\,\mathbf{A}}{m} \tag{3.91}$$

---

45) L'espressione si ricorda facilmente nella forma $\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, alquanto simile alla nota formula per il doppio prodotto vettore $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; ($\nabla \equiv$ grad, $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$). Verifichiamo per la componente x: $(\mathbf{v} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{A})_x = \dot{y}(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \dot{z}(\partial_z A_x - \partial_x A_z) = \dot{y}(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \dot{z}(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \dot{x}\partial_x A_x - \dot{x}\partial_x A_x = (\dot{x}\partial_x A_x + \dot{y}\partial_x A_y + \dot{z}\partial_x A_z) - (\dot{x}\partial_x A_x + \dot{y}\partial_y A_x + \dot{z}\partial_z A_x)$, dove $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, etc.

(il momento $\mathbf{p}$ differisce dunque dalla quantità di moto $m\dot{\mathbf{q}}$ per un termine additivo). L'hamiltoniana H è pertanto data da

$$H = (\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L)\Big|_{\dot{\mathbf{q}}=(\mathbf{p}-c\mathbf{A})/m} \,.$$

Se ora indichiamo con L_2, L_1 e L_0 i termini della lagrangiana (3.90), di grado rispettivamente due, uno e zero in $\dot{\mathbf{q}}$, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee abbiamo $\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}} = 2L_2 + L_1$, e di conseguenza $H = L_2 - L_0$, ovvero

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}\right)^2 + e\,\phi \;.$$

Si noti che, per la seconda delle (3.91), si ha $H = T + e\phi$, somma di energia cinetica ed energia potenziale; il termine magnetico $L_1 = e\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{A}$ non compare come addendo in H, ma di esso resta traccia nella parte cinetica, attraverso il legame "inconsueto" tra $\mathbf{p}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ (e per questa via resta traccia del campo magnetico nelle equazioni del moto).

3.7 Leggi di conservazione

3.7.1 *Conservazione dell'energia nel formalismo lagrangiano e in quello hamiltoniano*

Consideriamo un sistema lagrangiano a n gradi di libertà, di lagrangiana $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$, e introduciamo la funzione

$$E(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L \,. \tag{3.92}$$

Sulla base delle sole equazioni di Lagrange (e dunque senza restrizioni sulla forma di L) si calcola subito la derivata totale di $E(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t)$ rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \sum_{h=1}^{n} \big(\ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \dot{q}_h \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\big) - \sum_{h=1}^{n} \big(\dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial q_h} + \ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\big) - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\big) - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial t} \,.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Perciò, nel caso particolare in cui L non dipenda esplicitamente dal tempo, si vede che E è un integrale del moto.

Se poi la lagrangiana ha la forma $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, con $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$ (sistemi naturali, con vincoli fissi e forze conservative indipendenti dalle velocità), allora si ha

$$E = 2T - (T - V) = T + V \;. \tag{3.94}$$

In questo caso si vede che la quantità E conservata ha il significato di energia totale del sistema, scritta in funzione delle coordinate lagrangiane $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$; in effetti, come si vede chiaramente dalla definizione (3.92), E coincide con la funzione di Hamilton H (che in queste ipotesi si può certamente costruire), a meno del cambio di variabili da $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Se poi V dipende anche dalle velocità, più precisamente si ha $V = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$ (forza di Lorentz, forza di Coriolis), allora si trova (in modo analogo a quanto già si è visto per H)

$$E \,=\, 2T - V_1 - (T - V_0 - V_1) \,=\, T + V_0 \ .$$

La quantità E ha ancora il significato di energia, tuttavia ad essa non contribuisce il termine V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$; ciò è coerente con il fatto ben noto che le forze associate a V_1 sono ortogonali alla velocità, e dunque non compiono lavoro. Esse prendono il nome di *forze giroscopiche*.

La versione hamiltoniana della legge di conservazione dell'energia è ancora più semplice: risulta infatti

$$\dot{H} \,=\, \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \Bigl(\frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h \Bigr) \,=\, \frac{\partial H}{\partial t} \ ,$$

non appena si tenga conto delle equazioni di Hamilton $\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}$, $\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}$. Pertanto, se la funzione hamiltoniana H non dipende esplicitamente dal tempo, essa è un integrale del moto (vale la pena di ricordare che, come si è visto nel paragrafo precedente, si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, e dunque H si conserva non appena L sia indipendente da t).

- **Osservazione.** Esistono casi significativi di sistemi meccanici con energia cinetica dipendente dal tempo, in cui tuttavia la lagrangiana e la hamiltoniana risultano indipendenti dal tempo; ciò avviene in particolare quando si usano coordinate relative a un sistema uniformemente rotante (di grande interesse in meccanica celeste, tipicamente nel cosiddetto problema ristretto circolare dei tre corpi). Anche in questo caso avviene che H, per il solo fatto di essere indipendente dal tempo, è un integrale del moto (integrale di Jacobi).

Il formalismo lagrangiano è poi interessante anche nel caso in cui vi siano, in aggiunta ad eventuali forze conservative e giroscopiche, il cui potenziale indichiamo con $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, altre forze del tutto generiche, descritte mediante le componenti lagrangiane della sollecitazione $Q_1, \ldots, Q_n$. In questo caso abbiamo già visto che le equazioni di Lagrange si possono scrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ,$$

con $L = T - V$. Procedendo come sopra si ottiene (per L indipendente dal tempo), al posto della legge di conservazione $\dot{E} = 0$, la relazione più generale

$$\dot{E} \,=\, \sum_{h=1}^{n} Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, \dot{q}_h \ ;$$

il membro di destra rappresenta la potenza delle forze aggiuntive considerate, scritta mediante le coordinate libere. Se essa è sempre negativa o al più nulla (è il caso degli attriti), le forze si dicono *dissipative.*

Naturalmente, possiamo sempre pensare che siano incluse nelle Q_h tutte le forze attive, ovvero fare riferimento alle equazioni di Lagrange nella forma generale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \ ;$$

in tal caso, applicando il risultato precedente con $V = 0$ e $E = T$, otteneniamo

$$\dot T = \sum_h \dot q_h Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ;$$

si vede così che la derivata temporale dell'energia cinetica è uguale alla potenza di tutte le forze attive. E' questa la formulazione lagrangiana del Teorema dell'energia cinetica.

3.7.2 *Coordinate ignorabili*

Consideriamo un sistema lagrangiano naturale a n gradi di libertà, e supponiamo che L non dipenda in realtà da alcune coordinate,[46] ad esempio da $q_{m+1}, \dots, q_n$, per un fissato m, $1 \le m < n$:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t) \ .$$

Questa situazione si verifica, tipicamente, per problemi dotati di una qualche simmetria, a seguito di una buona scelta delle coordinate lagrangiane: ad esempio, per il problema di Keplero — più in generale, per forze centrali a simmetria sferica — se ci si riduce al piano dell'orbita e si usano le coordinate polari si trova che sia la matrice cinetica, sia l'energia potenziale V, dipendono della sola coordinata radiale; oppure, per il problema a due corpi con sole forze interne, è possibile far riferimento alle coordinate del centro di massa e alle coordinate relative di un punto rispetto all'altro, e allora la lagrangiana dipende solo da queste ultime. Se ciò si verifica, allora i momenti coniugati

$$p_l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q_l} \ , \qquad\qquad l = m+1, \dots, n \ , \tag{3.95}$$

sono integrali del moto del sistema (dalle equazioni di Lagrange si ha infatti $\dot p_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$).

Vogliamo sfruttare l'esistenza di questi integrali del moto per ridurre il numero di gradi di libertà effettivi del sistema da n a m, e scrivere una "lagrangiana ridotta" L^* che dipenda solo da $q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_m$, e sia però equivalente alla L per quanto riguarda le prime m coordinate. A questo scopo possiamo risolvere le (3.95) rispetto a $\dot q_{m+1}, \dots, \dot q_n$ (si usa ancora una volta il fatto che la matrice $\big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k}\big)$ è definita

[46] La lagrangiana dipende invece, necessariamente, da tutte le velocità, altrimenti l'energia cinetica non sarebbe definita positiva.

positiva, cosicché, in particolare, ha determinante diverso da zero il minore diagonale formato dalle ultime $n-m$ righe e colonne), e scrivere

$$\dot q_l \;=\; u_l(q_1,\ldots,q_m,\dot q_1,\ldots,\dot q_m,t,p_{m+1}\ldots,p_n)\;, \qquad l=m+1,\ldots,n\;. \tag{3.96}$$

Si verifica ora senza difficoltà che la lagrangiana L^* cercata è data da

$$L^*(q_1,\ldots,q_m,\dot q_1,\ldots,\dot q_m,t;p_{m+1},\ldots,p_n) = L(q_1,\ldots,q_m,\dot q_1,\ldots,\dot q_n,t) - \sum_{l=m+1}^n p_l\dot q_l\;, \tag{3.97}$$

ove $\dot q_{m+1},\ldots,\dot q_n$ vanno pensate espresse in funzione di tutte le altre variabili e delle costanti $p_{m+1},\ldots,p_n$, per mezzo delle (3.96) (in L^* le costanti $p_{m+1},\ldots,p_n$ giocano il ruolo di parametri, fissati dal dato iniziale; abbiamo così, in corrispondenza all'unica lagrangiana L, una famiglia a $n-m$ parametri di lagrangiane ridotte). Per dimostrarlo basta osservare che, per $h\le m$, risulta

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{l=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot q_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_h} - \sum_{l=m+1}^n p_l\frac{\partial u_l}{\partial q_h} \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_h}\;,$$

e allo stesso modo $\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_h}=\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$; di conseguenza le equazioni di lagrange relative a L^* coincidono con le prime m equazioni di Lagrange relative a L.

Una volta determinata la soluzione $q_1(t),\ldots,q_m(t)$ del problema ridotto, le (3.96) forniscono $\dot q_{m+1}(t),\ldots,\dot q_n(t)$; tramite una integrazione (ordinaria), si possono allora determinare anche $q_{m+1}(t),\ldots,q_n(t)$. Si vede così che la risoluzione del problema ridotto è equivalente, a meno di una quadratura, alla risoluzione del problema completo. Le coordinate $q_{m+1},\ldots,q_n$ prendono il nome di *coordinate ignorabili*.

- **Osservazione.** Vale la pena di sottolineare l'analogia della (3.97) con la relazione che lega L e H. Ciò che abbiamo fatto è, in sostanza, un passaggio parziale dalle coordinate lagrangiane q_h e $\dot q_h$ alle coordinate canoniche q_h e p_h, limitato alle ultime $n-m$ coordinate; proprio in questo modo riusciamo a utilizzare il fatto che $p_{m+1}\ldots,p_n$ (a differenza di $\dot q_{m+1},\ldots,\dot q_n$) sono costanti.[47)] In ambito hamiltoniano, grazie al fatto che il passaggio alle coordinate p_h, q_h è già stato fatto, il problema delle coordinate ignorabili è più semplice: se $q_{m+1},\ldots,q_n$ non figurano in H, allora le variabili $p_{m+1},\ldots,p_n$ si comportano come parametri costanti, e il sistema si può pensare – senza bisogno di cambiare hamiltoniana – come un sistema con soli m gradi di libertà effettivi.

- **Esempio.** Consideriamo un sistema piano con un potenziale centrale, cioè dipendente solo dalla distanza r dall'origine; utilizzando le coordinate polari r, φ la lagrangiana si scrive allora
$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) \;=\; \frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)-V(r)\;.$$

---

47) Non sarebbe difficile vedere che questo passaggio si può fare sempre, indipendentemente dal fatto che $q_{m+1},\ldots,q_n$ compaiano o meno nella lagrangiana, dando luogo a equazioni del moto nella forma di equazioni di Lagrange per i primi m gradi di libertà, ed equazioni canoniche per i gradi di libertà rimanenti (equazioni di Routh).

Poiché L in realtà non dipende da φ, il momento coniugato $p_\varphi = mr^2\dot\varphi$ è un integrale del moto; risolvendo rispetto a $\dot\varphi$ troviamo $\dot\varphi = p_\varphi/mr^2$. La (3.97) fornisce allora

$$\begin{aligned} L^*(r,\dot r;p_\varphi) &= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \\ &= \frac{m}{2}\dot r^2 - V(r) - W(r;p_\varphi) \ , \end{aligned}$$

con $W = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$. Otteniamo così un sistema lagrangiano a un solo grado di libertà, con una sorta di "energia potenziale efficace" $V^* = V + W$; si osservi che il termine aggiuntivo W (se $p_\varphi \neq 0$) è repulsivo, e diverge nell'origine.

- **Esercizio 3.10:** Si tracci il grafico del potenziale efficace V^* per il problema di Keplero, per l'oscillatore armonico bidimensionale, e per un punto materiale soggetto a una forza radiale di intensità costante (punto vincolato alla superficie di un cono rovesciato con asse verticale). Si studi qualitativamente il moto nei tre casi.

- **Esercizio 3.11:** Si determinino le condizioni su $V(r)$, per le quali l'origine non può mai essere raggiunta (per energia e momento angolare fissati).

3.7.3 Il Teorema di Noether (proprietà di invarianza e leggi di conservazione)

Consideriamo un sistema lagrangiano, con lagrangiana $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$; come sappiamo, se L non dipende da una coordinata, ad esempio q_l, allora il corrispondente momento coniugato $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot q_l}$ è una costante del moto. Ora, la proprietà che L non dipende dalla coordinata q_l può essere espressa in forma significativa nel modo seguente. Si considera la famiglia a un parametro di trasformazioni

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}) \ , \qquad \dot{\mathbf{q}} \mapsto \boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \ ,$$

corrispondente alla traslazione di α della sola coordinata q_l (banalmente estesa alle variabili $\dot q_h$):

$$\varphi_h(\alpha,\mathbf{q}) = q_h + \alpha\delta_{lh} \ , \qquad \psi_h(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot q_h \ , \qquad h = 1,\ldots,n \ .$$

Allora l'indipendenza di L dalla coordinata q_l si può esprimere dicendo che L è invariante (non cambia valore) sotto questa particolare famiglia di trasformazioni: $L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t) = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$. Corrispondentemente, si può dire che la legge di conservazione $\dot p_l = 0$ è associata a tale proprietà di invarianza della lagrangiana.

Questo risultato si generalizza a famiglie qualsiasi di trasformazioni (regolari e invertibili, precisamente diffeomorfismi locali) $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q})$, dipendenti con regolarità da un parametro reale α, nel senso che *a ciascuna famiglia che lasci invariante la lagrangiana è associata una particolare legge di conservazione*. Ciò è assicurato dalla seguente

Proposizione 3.12 (Teorema di Emmy Noether): *Sia $\mathbf{q} \mapsto \varphi(\alpha,\mathbf{q})$ una famiglia di diffeomorfismi locali dipendente da un parametro reale α, definita e differenziabile in α per α in un intorno dell'origine, e soddisfacente $\varphi(0,\mathbf{q}) = \mathbf{q}$; sia $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\dot q_k$ la naturale estensione di tale trasformazione alle velocità. Se per ogni scelta di $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e α*

risulta

$$L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t) = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ , \tag{3.98}$$

allora la funzione

$$P(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0,\mathbf{q})\, p_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \ ,$$

dove $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$*, è un integrale del moto per le equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana* L*.*

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata di $L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t)$ rispetto ad α. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha} \Big) \ .$$

D'altra parte per le equazioni di Lagrange risulta $\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$, mentre dalla definizione di ψ_h si deduce immediatamente[48] $\frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}$; si ha pertanto

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} \Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ .$$

Ma per la proprietà di invarianza (3.98) si ha $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, e quindi segue che $\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ è una costante del moto. In particolare,[49] per $\alpha = 0$ si ottiene $\dot{P} = 0$. *Q.E.D.*

- **Esempio.** Consideriamo due punti materiali m_1 e m_2, non soggetti a vincoli, e supponiamo che il potenziale con cui essi interagiscono dipenda solo dal modulo della distanza relativa $|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}|$. Usando il teorema di Noether dimostriamo che si conservano la quantità di moto totale $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}^{(1)} + m_2\mathbf{v}^{(2)}$ e il momento della quantità di moto totale $\mathbf{M} = m_1\mathbf{x}^{(1)} \wedge \mathbf{v}^{(1)} + m_2\mathbf{x}^{(2)} \wedge \mathbf{v}^{(2)}$. A tale scopo poniamo $(q_1,\ldots,q_6) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\ldots,x_3^{(2)})$; la lagrangiana si scrive allora

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - V[(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2] \ ,$$

e si vede che:

a) L è invariante per traslazione lungo uno qualsiasi dei tre assi cartesiani. Con riferimento alle traslazioni lungo l'asse x_1, ciò vuol dire che L è invariante per la sostituzione $q_h \mapsto \varphi_h(\alpha,\mathbf{q})$, $\dot{q}_h \mapsto \psi_h(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, con $\varphi_1 = q_1 + \alpha$, $\varphi_4 = q_4 + \alpha$, e $\varphi_h = q_h$ per $h \neq 1,4$, mentre $\psi_h = \dot{q}_h$ per ogni h. Poiché $\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} = 0$ per $h \neq 1,4$ e $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha} = 1$, usando il teorema di Noether si conclude che $p_1 + p_4$, che è la prima componente del vettore quantità di moto, si conserva. Allo stesso modo si procede evidentemente per le altre componenti.

---

[48] Si tratta della ripetizione di un semplice calcolo eseguito altre volte, che porta qui a scambiare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ con $\frac{\partial}{\partial \alpha}$.

[49] Per ogni $\alpha \neq 0$ si ottiene ancora una costante del moto $P^\alpha(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, che però (ovviamente) non è indipendente da P (P^α è l'immagine di P sotto la trasformazione $\mathbf{q} \mapsto \varphi(\alpha,\mathbf{q})$, $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \psi(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$).

b) La lagrangiana, data la simmetria sferica, è invariante anche per rotazione intorno a ciascuno degli assi coordinati. Con riferimento a rotazioni attorno all'asse x_3, ciò vuol dire che la sostituzione $q_h \mapsto \varphi_h(\alpha, \mathbf{q})$, definita da

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \varphi_3 = q_3$$
$$\begin{pmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \varphi_6 = q_6$$

(con naturale estensione $\dot{q}_h \mapsto \psi_h(\alpha, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$), lascia invariata L. In questo caso risulta

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = -q_2 \ , \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = q_1 \ , \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = 0 \ ,$$

e si hanno simili relazioni con gli indici aumentati di tre. La quantità conservata è allora

$$-q_2 p_1 + q_1 p_2 - q_5 p_4 + q_4 p_5 = m_1 (x_1^{(1)} v_2^{(1)} - x_2^{(1)} v_1^{(1)}) + m_2 (x_1^{(2)} v_2^{(2)} - x_2^{(2)} v_1^{(2)}) \ ,$$

che è la terza componente del momento angolare. Allo stesso modo si procede per le altre due componenti.

L'esempio si generalizza, evidentemente, a un numero qualsiasi di punti materiali, e anche a un sistema esteso. Si vede così che nel formalismo lagrangiano le più comuni leggi di conservazione della fisica si possono far risalire all'invarianza della lagrangiana per traslazioni (omogeneità dello spazio) e per rotazioni (isotropia dello spazio). Ciò conferma le analoghe osservazioni fatte già nell'ambito del formalismo newtoniano. Vale la pena di osservare che anche la legge di conservazione dell'energia, che come si è visto richiede l'indipendenza della lagrangiana da t, è associata a una proprietà di invarianza, precisamente l'invarianza della lagrangiana per traslazioni temporali (omogeneità del tempo).

3.8 Le parentesi di Poisson

3.8.1 Integrali del moto e parentesi di Poisson

Nell'ambito del formalismo hamiltoniano esiste uno strumento interessante ed efficace per lo studio degli integrali del moto, che fu sviluppato principalmente da Poisson e Jacobi nel secolo scorso. Per introdurlo, consideriamo un qualsiasi sistema hamiltoniano a n gradi di libertà, di hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, e una generica funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. E' immediato verificare che la derivata totale di f rispetto al tempo è data da

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial f}{\partial q_h} \dot{q}_h \Big) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} - \frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \Big) \ . \tag{3.99}$$

E' significativo allora introdurre l'applicazione che a ogni coppia ordinata di funzioni (regolari) f e g associa la funzione $\{f, g\}$ (detta *parentesi di Poisson* di f e g) definita da

$$\{f, g\} \;=\; \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_h}\frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial g}{\partial q_h} \Big) \;; \tag{3.100}$$

infatti, con questa notazione possiamo riscrivere la (3.99) nella forma

$$\dot f = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \;\; . \tag{3.101}$$

Possiamo perciò dire che f è un integrale del moto se e solo se si ha $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$; in particolare, una funzione f indipendente dal tempo è un integrale del moto, se e solo se si annulla la parentesi di Poisson di f con H: $\{f, H\} = 0$.

- **Osservazione.** La definizione ora data di parentesi di Poisson di due variabili dinamiche $\{f, g\}$ fa riferimento a un particolare sistema di coordinate $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nello spazio delle fasi. A priori, potrebbe avvenire che la funzione $\{f, g\}$ così definita dipendesse dalle particolari coordinate impiegate (come si capisce se si considera ad esempio l'applicazione che ad ogni funzione f associa la funzione $\frac{\partial f}{\partial q_1}$). Non sarebbe difficile dimostrare direttamente che la definizione data è invariante sotto trasformazioni puntuali estese, e dunque intrinseca; la dimostrazione esplicita sarà data nel prossimo capitolo, dove si mostrerà l'invarianza sotto la classe più generale delle trasformazioni canoniche.

3.8.2 Proprietà della parentesi di Poisson

Sono di immediata verifica, sulla base della sola definizione, le seguenti proprietà, elementari ma importanti, della parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned} &a) \qquad && \{f, g\} = -\{g, f\} \\ &b) && \{f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1 \{f, g_1\} + \alpha_2 \{f, g_2\} \\ &c) && \{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\}\, g_2 + g_1\, \{f, g_2\} \;\; . \end{aligned} \tag{3.102}$$

- **Osservazione.** La relazione di antisimmetria a) implica in particolare $\{f, f\} = 0$ per ogni f (e dunque in particolare $\{H, H\} = 0$, sicchè, coerentemente con la proprietà precedentemente dimostrata, si ha $\dot H = \frac{\partial H}{\partial t}$). Più in generale, è immediato verificare che se (ad esempio) g dipende da f, cioè si ha $g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = G\big(f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\big)$, ove G è una funzione regolare: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora risulta $\{f, g\} = 0$. La relazione di linearità b) vale, evidentemente, non solo per g ma anche per f, ovvero la parentesi di Poisson è una operazione *bilineare*. Infine, la proprietà c) corrisponde alla regola di Leibniz per la derivata di un prodotto.

E' significativo riguardare alla parentesi di Poisson nel modo seguente: per ogni fissata f, la parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è il risultato dell'applicazione a g di un operatore di derivazione $\mathcal{D}_f$, definito precisamente da

$$\mathcal{D}_f = \sum_h \left[\Big(\frac{\partial f}{\partial q_h} \Big) \frac{\partial}{\partial p_h} - \Big(\frac{\partial f}{\partial p_h} \Big) \frac{\partial}{\partial q_h} \right] \ .$$

Come si è visto nel primo capitolo, per ogni funzione $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (cioè per ogni campo vettoriale $\mathbf{\Phi}(x_1, \cdots, x_m)$), l'operatore di derivazione $\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} = \sum_i \Phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ prende il nome di *derivata di Lie* associata a $\mathbf{\Phi}$; dunque l'operatore di derivazione $\mathcal{D}_f$ sopra considerato è un caso particolare di derivata di Lie: precisamente (posto $m = 2n$, $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$) si ha $\mathcal{D}_f = \mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}}$, con $\mathbf{\Phi} = (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}, -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}})$.[50)]

Mostriamo ora che la parentesi di Poisson soddisfa la seguente importante identità:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \ , \tag{3.103}$$

chiamata *identità di Jacobi* (si faccia attenzione alla permutazione ciclica delle tre funzioni).

La verifica si esegue, senza ricorrere a calcoli piuttosto lunghi (benché elementari), semplicemente osservando che, se sviluppassimo il primo membro, troveremmo una somma di termini, ciascuno contenente una derivata seconda di una delle funzioni f, g o h; se allora proviamo che l'espressione al primo membro non può contenere derivate seconde di nessuna delle tre funzioni, ciò vuol dire che tutti questi termini si elidono, e pertanto la somma è nulla. Mostriamo dunque che non possono essere presenti, ad esempio, derivate seconde di h. Queste non si trovano, evidentemente, nell'ultimo termine; d'altra parte, è immediato verificare che i primi due termini danno $\mathcal{D}_f \mathcal{D}_g h - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f h = [\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g] h$, avendo indicato con $[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g]$ il *commutatore* di $\mathcal{D}_f$ e $\mathcal{D}_g$, ovvero la quantità $\mathcal{D}_f \mathcal{D}_g - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f$. Ora, è molto facile verificare che il commutatore di due qualsiasi derivate di Lie è ancora, del tutto in generale, una derivata di Lie, e dunque non contiene derivate seconde; più precisamente, vale il seguente facile

Lemma 3.1: *Il commutatore $[\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}}, \mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}}]$ delle derivate di Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}}$ e $\mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}}$ è la derivata di Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}$, dove*

$$\Theta_i = \mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} \Psi_i - \mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}} \Phi_i \ , \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \ . \tag{3.104}$$

Dimostrazione. Per ogni f si ha

$$\Big(\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} \mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}} - \mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}} \mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} \Big) f = \sum_{ij} \Phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Psi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big) - \sum_{ij} \Psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Phi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big) \ ;$$

i termini contenenti le derivate seconde di f si semplificano, e resta

$$\sum_{ij} \Big(\Phi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} - \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_j \Big(\Theta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) f \ .$$

---

50) Il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ coincide, in questo caso, con le equazioni di Hamilton associate a $-f$, pensata come hamiltoniana di un sistema dinamico; per tale sistema si ha, evidentemente, $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, f\} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathcal{D}_f g$.

Q.E.D.

L'identità di Jacobi è così dimostrata.

- **Osservazione.** E' immediato verificare (usando l'antisimmetria della parentesi di Poisson) che nel linguaggio degli operatori di derivazione l'identità di Jacobi si riscrive equivalentemente $\mathcal{D}_f \mathcal{D}_g h - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f h - \mathcal{D}_{\{f,g\}} h = 0$, ovvero (per l'arbitrarietà di h)
$$[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g] = \mathcal{D}_{\{f,g\}} \ .$$
Questa relazione altro non è che un caso particolare della relazione $[\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}}, \mathcal{L}_{\mathbf{\Psi}}] = \mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}$ sopra dimostrata, con $\mathbf{\Theta}$ dato dalla (3.104).

- **Osservazione.** Se in uno spazio vettoriale lineare si introduce una operazione antisimmetrica bilineare (proprietà a) e b)), che soddisfa l'identità di Jacobi, si ottiene una struttura algebrica chiamata *algebra di Lie*; esempi familiari di algebra di Lie sono lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto vettoriale $\wedge$, lo spazio delle matrici di ordine fissato munito del commutatore, l'insieme degli operatori lineari su uno spazio di Hilbert (ad esempio $L^2(\mathbb{R})$), munito ancora del commutatore. La parentesi di Poisson introduce la struttura di algebra di Lie sull'insieme delle funzioni dello spazio delle fasi differenziabili infinite volte.[51)]

3.8.3 Esempi

E' del tutto evidente che se (con un innocuo abuso di linguaggio) indichiamo con p_h, q_h le variabili dinamiche corrispondenti alle funzioni coordinate (ovvero $p_h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_h$, ...), si ottiene
$$\{p_h, p_k\} = 0 \ , \qquad \{q_h, q_k\} = 0 \ , \qquad \{p_h, q_k\} = -\delta_{hk} \ , \qquad h, k = 1, \ldots, n \ ;$$
queste vengono chiamate *parentesi di Poisson fondamentali.*

Si constata poi immediatamente che le equazioni di Hamilton si possono scrivere per mezzo delle parentesi di Poisson nella forma[52)]
$$\dot{p}_h \ = \ \{p_h, H\} \ , \qquad \dot{q}_h \ = \ \{q_h, H\}$$
(coerentemente con la relazione generale (3.101)).

Consideriamo ora le componenti cartesiane della quantità di moto e del momento angolare per un punto materiale. Usando le proprietà b), c) della parentesi di Poisson,

---

51) Questa identità di strutture algebriche è alla base della corrispondenza tra meccanica classica e meccanica quantistica, in cui funzioni dello spazio delle fasi classico corrispondono a operatori su di uno spazio di Hilbert (spazio degli stati quantistici), e le parentesi di Poisson corrispondono ai commutatori.

52) Si noti in particolare come con questa scrittura scompaia la dissimmetria dovuta alla presenza di un segno meno nelle equazioni di Hamilton.

si mostra immediatamente che si ha

$$\{p_x, M_z\} = -p_y \ , \qquad \{p_y, M_z\} = p_x \ , \qquad \{p_z, M_z\} = 0 \ ,$$

con analoghe relazioni per M_y e M_z. Così si trova anche

$$\{M_x, M_y\} = M_z \ ,$$

assieme alle analoghe relazioni che si ottengono ciclando gli indici. Infine, si vede che si ha

$$\left\{M_x, M^2\right\} = \left\{M_y, M^2\right\} = \left\{M_z, M^2\right\} = 0 \ .$$

- **Esercizio 3.12:** Si consideri un punto materiale in un potenziale centrale a simmetria sferica. Utilizzando il fatto che in coordinate sferiche $M_z = p_\varphi$ è il momento coniugato alla coordinata φ, si mostri che M_z è un integrale del moto. Usando poi l'arbitrarietà della scelta dell'asse z, si concluda che anche M_x e M_y (e quindi anche M^2) sono integrali del moto.

- **Esercizio 3.13:** Si determinino in maniera analoga gli integrali del moto per il problema dei due corpi.

- **Esercizio 3.14:** Usando l'identità di Jacobi, si verifichi che la parentesi di Poisson di due integrali del moto è pure un integrale del moto *(teorema di Jacobi)*. In particolare, se due componenti del momento angolare si conservano, si conserva necessariamente anche la terza componente.

- **Osservazione.** Due variabili dinamiche la cui parentesi di Poisson sia nulla si dicono *in involuzione;* con un linguaggio un po' improprio si dice anche che commutano. Come si vedrà più avanti, hanno grande importanza gli integrali del moto in involuzione, in particolare quando ne esiste un numero pari al numero dei gradi di libertà. In tal caso si dice che si ha un sistema *completo* di integrali in involuzione.[53] Ad esempio, per il moto centrale H, M^2 e M_z costituiscono un sistema completo di integrali in involuzione.

3.9 Soluzioni di equilibrio, stabilità e piccole oscillazioni

3.9.1 Equilibrio e stabilità; il teorema di Lagrange-Dirichlet

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, con vincoli fissi e sollecitazioni non dipendenti esplicitamente da t, definito per $\mathbf{q} \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, per un opportuno aperto $\mathcal{U}_0$ di $\mathbb{R}^n$. Poiché i vincoli sono fissi, l'energia cinetica si riduce alla sua parte quadratica, ovvero si ha $T = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$. Come sappiamo, le

[53] In meccanica quantistica gioca un ruolo molto importante l'analoga nozione di sistema completo di osservabili che commutano, e che siano eventualmente integrali del moto.

equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \ , \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{3.105}$$

si possono sempre mettere in forma normale, che possiamo scrivere come sistema di n equazioni del secondo ordine, del tipo

$$\ddot q_h = f_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ , \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ ,$$

ovvero di $2n$ equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot q_h = \eta_h \\ \dot\eta_h = f_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}) \end{cases} \qquad\qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{3.106}$$

Si ha inoltre $\sum_k a_{hk}(\mathbf{q}) f_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - g_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con g_h dato dalla (3.55); nelle nostre ipotesi tale espressione si riduce a $g_h = \sum_{jk} \big(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h}\big) \dot q_j \dot q_k$.

Riprendendo la nozione di punto di equilibrio per un sistema dinamico, introdotta nel primo capitolo,[54)] diremo che $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è una configurazione o un punto di equilibrio per le equazioni di Lagrange (3.105), se $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio per il sistema (3.106), ovvero se risulta $f_h(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = 0$, $h = 1, \ldots, n$. E' facile allora verificare la seguente

Proposizione 3.13: *Il punto $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è punto di equilibrio per le equazioni di Lagrange (3.105), se e solo se si ha $Q_h(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = 0$, per $h = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Come si vede dall'espressione di g_h, si ha $g_h(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = 0$; di conseguenza, per l'invertibilità della matrice cinetica, risulta $f_h(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = 0$ per ogni h, se e solo se $Q_h(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = 0$ per ogni h. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Il punto di equilibrio $\mathbf{q}^*$ è dunque anche caratterizzato dal fatto che il lavoro virtuale $\sum_h Q_h \delta q_h$ (o equivalentemente $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i$) è nullo per ogni spostamento virtuale a partire dalla configurazione di equilibrio; tale proprietà esprime il cosiddetto *principio dei lavori virtuali.*[55)]

- **Osservazione.** Si vede bene che l'eventuale presenza di forze proporzionali alla velocità, o comunque nulle per velocità nulle (attrito viscoso, forza di Coriolis e forza di Lorentz) è del tutto ininfluente per la determinazione delle configurazioni di equilibrio.

---

54) Si faccia bene attenzione, qui e nel seguito (soprattutto nel fare la connessione con gli argomenti visti nel primo capitolo), alla distinzione tra punti dello spazio delle configurazioni (come $\mathbf{q}^*$) e punti dello spazio degli stati (come $\mathbf{c}$).

55) Nella letteratura si fa frequentemente riferimento, a questo proposito, al caso di vincoli eventualmente unilateri (si pensi a problemi di equilibrio per punti materiali appoggiati, o sospesi a fili tesi); in questo caso si vede facilmente che la condizione (necessaria e sufficiente) per l' equilibrio è che il lavoro delle forze attive, per spostamenti virtuali arbitrari a partire dalla configurazione di equilibrio, sia negativo o nullo. Il principio dei lavori virtuali è stato un caposaldo nella formazione dei principi della meccanica; si veda E. Mach, *Die Mechanik, in ihrer Entwicklung kritisch historisch dargestellt*, trad. italiana presso Boringhieri (Torino).

- **Osservazione.** Il risultato sopra dimostrato è analogo al risultato, ovvio nell'ambito della meccanica Newtoniana, che si ha equilibrio se e solo se si annullano le forze. La proposizione tuttavia è tuttaltro che banale: si pensi al punto materiale vincolato a una superficie; nell'equazione del moto, $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$, è presente anche la reazione vincolare Φ, che tuttavia non compare nella condizione di equilibrio, per la quale bisogna e basta che si annullino le componenti di $\mathbf{F}$ tangenti alla superficie.

Nel caso particolarmente significativo di sollecitazioni posizionali conservative, si ha, come sappiamo, $Q_h(\mathbf{q}) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q})$; la proposizione sopra dimostrata prende allora la forma seguente:

Proposizione 3.14: *La configurazione $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è di equilibrio, se e solo se $\mathbf{q}^*$ è un punto di stazionarietà dell'energia potenziale: $\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}^*) = 0$, $h = 1, \ldots, n$.*

Veniamo ora al problema della stabilità dell'equilibrio. Con riferimento alla nozione di stabilità introdotta nel primo capitolo, diremo che la configurazione di equilibrio $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è stabile per le equazioni di Lagrange (3.105), se $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema (3.106); in modo altrettanto ovvio si trasporta la nozione di stabilità solo nel futuro o nel passato, o la stabilità asintotica.

- **Osservazione.** Non è difficile vedere che la definizione di stabilità data nel primo capitolo si può così riformulare: comunque si prenda un intorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ di $\mathbf{q}^*$, e comunque si prefissi $\varepsilon > 0$, esistono un intorno $\mathcal{V}$ di $\mathbf{q}^*$, e un numero $\delta > 0$, tali che ogni orbita di dato iniziale $(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)$, con $\mathbf{q}^0 \in \mathcal{V}$ ed energia cinetica iniziale $T(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) < \delta$, resta indefinitamente in $\mathcal{U}$, con energia cinetica $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < \varepsilon$ (la verifica è lasciata come esercizio; si tratta solo di vedere che non è restrittivo prendere gli intorni U e V, che compaiono nella definizione di stabilità, del tipo $U = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbf{q} \in \mathcal{U}, T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < \varepsilon\}$, e similmente per V).

Nel caso di sollecitazioni posizionali conservative, un criterio di stabilità di importanza fondamentale è fornito dalla seguente

Proposizione 3.15 (Teorema di Lagrange-Dirichlet): *Sia dato un sistema lagrangiano naturale, con lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, $T = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$. Se l'energia potenziale V ha un minimo stretto in $\mathbf{q}^*$, allora $\mathbf{q}^*$ è punto di equilibrio stabile.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{q}^*$ è punto di minimo, allora si ha $\frac{\partial V}{\partial q_h} = 0$, $h = 1, \ldots, n$, perciò $\mathbf{q}^*$ è innanzitutto punto di equilibrio. La stabilità di $\mathbf{q}^*$ si dimostra immediatamente, osservando che l'energia totale $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$ è una buona funzione di Ljapunov[56)] per il sistema (3.106): infatti, in un intorno di $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ risulta sicuramente $E \geq E_0 = V(\mathbf{q}^*)$, l'uguaglianza essendo verificata solo in $\mathbf{c}$; d'altra parte, poiché E è un integrale del moto per le equazioni di Lagrange, risulta $\dot{E} = 0$. Ciò conclude la prova. *Q.E.D.*

---

56) Come è evidente, il teorema di Ljapunov è qui applicato in $\mathbb{R}^{2n}$, con $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Il teorema di Lagrange–Dirichlet si estende poi in modo ovvio ai casi più comuni di forze dipendenti dalla velocità. Precisamente:

i. nel caso di potenziali dipendenti dalla velocità, della forma $V = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ con V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$, si vede immediatamente che il criterio di stabilità rimane valido, pur di fare riferimento alla sola parte posizionale V_0: invero, attorno ai punti di minimo di V_0 (che si vedono immediatamente essere ancora punti di equilibrio) l'energia $E = T + V_0$ (si ricordi che il termine V_1 non contribuisce) è ancora una buona funzione di Ljapunov, come se le forze dipendenti dalla velocità non esistessero. In particolare dunque il criterio di stabilità di Lagrange-Dirichlet si estende al caso delle forze elettromagnetiche e dei sistemi di riferimento rotanti.

ii. Nel caso in cui, in aggiunta ad eventuali forze conservative, dipendenti o meno dalla velocità, vi siano forze dissipative (attriti), allora la stabilità permane, ma solo per tempi positivi. Infatti, come abbiamo visto, le forze dissipative sono caratterizzate dal fatto che si ha $\dot{E} = \sum_h \dot{q}_h Q_h \leq 0$; per il teorema di Ljapunov la conclusione è immediata. In alcuni tipici casi di interesse fisico (in particolare per l'attrito viscoso), usando come ipotesi nel teorema di Ljapunov la condizione b"), più debole di b'), è possibile verificare che la dissipazione non solo non distrugge la stabilità (nel futuro) dei punti di equilibrio, ma anzi la muta in stabilità asintotica.

- **Osservazione.** E' bene sottolineare il fatto che il teorema di Lagrange–Dirichlet sopra dimostrato fornisce una condizione solo sufficiente, e non anche necessaria,[57)] per la stabilità dell'equilibrio. Si conoscono diverse condizioni necessarie; in particolare, come vedremo tra breve, l'esistenza di un minimo di V è condizione necessaria oltre che sufficiente, nel caso comune (e generico) in cui la presenza o l'assenza del minimo si possono determinare dalla sola analisi delle derivate seconde di V in $\mathbf{q}^*$. Il problema generale della ricerca di una condizione necessaria per la stabilità dell'equilibrio (detto anche *problema di Dirichlet inverso*) è tuttavia ancora aperto.

3.9.2 Linearizzazione delle equazioni attorno a una configurazione di equilibrio

Ci proponiamo qui di studiare il comportamento dei sistemi lagrangiani in prossimità di una configurazione di equilibrio; a tale scopo applicheremo alle equazioni di Lagrange una procedura di linearizzazione, analoga a quella introdotta nel primo capitolo per passare dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ all'equazione linearizzata $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, in vista della classificazione dei punti singolari.[58)]

[57)] Un semplice controesempio è dato dal sistema a un grado di libertà con energia potenziale $V(q) = q^k \sin q^{-1}$, $k > 4$: l'origine, pur non essendo un minimo di V, è tuttavia, come è facile convincersi, un punto di equilibrio stabile. Un controesempio con V di classe C^∞ è dato da $V(q) = \exp\,(-1/q^2)\,\sin q^{-1}$.

[58)] E' bene tuttavia aver presenti alcune diversità: a differenza del Capitolo 1, qui tratteremo direttamente equazioni del secondo ordine; inoltre ci limiteremo allo studio dei sistemi conservativi. Nella sostanza, vedremo in dettaglio come si estende a un problema lagrangiano a n gradi di libertà lo studio allora effettuato per i sistemi conservativi a un grado di libertà (sistemi $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Consideriamo dunque un sistema lagrangiano naturale a n gradi di libertà, con lagrangiana indipendente dal tempo $L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, $T = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$. Supponiamo che il sistema abbia un punto di equilibrio in $\mathbf{q}^*$, e sviluppiamo L attorno al punto $(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$. Per semplificare le notazioni assumiamo (senza perdita di generalità: basta una traslazione dell'origine) $\mathbf{q}^* = \mathbf{0}$. Si trova allora

$$L = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\mathbf{0})\dot{q}_h\dot{q}_k - V(\mathbf{0}) - \sum_h \frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{0})q_h - \frac{1}{2}\sum_{hk}\frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(\mathbf{0})q_h q_k + \mathcal{O}_3\,,$$

dove $\mathcal{O}_3$ contiene termini almeno cubici nelle q_h e $\dot{q}_h$. Ricordando che si ha $\frac{\partial V}{\partial q_h}(0) = 0$ per ogni h, e trascurando la costante $V(\mathbf{0})$, otteniamo $L = L^* + \mathcal{O}_3$, con

$$L^* = T^*(\dot{\mathbf{q}}) - V^*(\mathbf{q})\ , \tag{3.107}$$

avendo posto

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2}\sum_{hk} a^*_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k\,, \qquad a^*_{hk} \equiv a_{hk}(\mathbf{0}) \\ V^* &= \frac{1}{2}\sum_{hk} b^*_{hk} q_h q_k\,, \qquad b^*_{hk} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(\mathbf{0})\ . \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange associate a L^* sono lineari, e con notazione compatta si scrivono nella forma

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = 0\ , \tag{3.108}$$

dove A e B denotano rispettivamente le matrici di elementi a^*_{hk} e b^*_{hk}. La matrice A è la matrice cinetica valutata in $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, e pertanto è sicuramente invertibile; dalla (3.108) si ottiene allora senza problemi la forma normale $\ddot{\mathbf{q}} = C\mathbf{q}$, con $C = -A^{-1}B$. E' facile (anche se un po' laborioso) verificare che la medesima equazione si ottiene anche scrivendo le equazioni di Lagrange corrispondenti alla lagrangiana completa L, ed effettuando la linearizzazione sulle equazioni del moto in forma normale (la verifica è necessaria, ed è bene sia eseguita come esercizio).

- **Osservazione.** Le equazioni del moto linearizzate (3.108) differiscono dalle equazioni vere per termini di secondo ordine in q_h e $\dot{q}_h$; perciò possiamo pensare (ma si tratta di una affermazione molto delicata, da non prendersi troppo alla leggera) che esse rappresentino bene il moto del sistema in un piccolo intorno del punto di equilibrio. La cosa è particolarmente interessante se il punto di equilibrio è stabile, perchè allora, come sappiamo, ogni traiettoria con dato iniziale sufficientemente vicino al punto di equilibrio resta indefinitamente vicina a tale punto, e dunque le equazioni linearizzate approssimano le equazioni vere per tempi lunghi (ma qui occorre una cautela ancora maggiore: in particolare, non si deve pensare che le soluzioni delle equazioni linearizzate e delle equazioni vere restino necessariamente vicine per tempi lunghi).

---

in $\mathbb{R}^2$, con $\mathrm{Tr}A = 0$).

Le equazioni del moto (3.108) sono lineari e omogenee; dunque vale il principio di sovrapposizione, e per trovare l'integrale generale basta procurarsi $2n$ soluzioni indipendenti. Con un procedimento tipico,[59] cerchiamo soluzioni della forma particolare

$$\mathbf{q}(t) \;=\; \tau(t)\mathbf{u} \;,$$

ove $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante, mentre la funzione scalare $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racchiude tutta la dipendenza dal tempo.[60] Per sostituzione nella (3.108) si ottiene allora $\ddot{\tau}(t)A\mathbf{u} + \tau B\mathbf{u} = 0$, il che è possibile se e solo se $A\mathbf{u}$ e $B\mathbf{u}$ sono paralleli, ovvero se con opportuna costante λ si ha[61]

$$B\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} \;. \tag{3.109}$$

Per ogni valore λ per il quale questa equazione ammetta soluzione, la funzione $\tau(t)$ è poi determinata dalla familiare equazione del secondo ordine

$$\ddot{\tau} = -\lambda\tau \;, \tag{3.110}$$

che come sappiamo fornisce sempre due soluzioni indipendenti. Dunque, lo studio dell'integrale generale della (3.108) è ricondotto alla ricerca di n soluzioni indipendenti della (3.109). Questa equazione altro non è che una generalizzazione della più familiare equazione agli autovalori per la matrice B, cui siamo ricondotti nel caso in cui A sia l'identità. Grazie al fatto che A è simmetrica e definita positiva, essa mantiene, con pochi semplici adattamenti, le proprietà algebriche essenziali dell'equazione agli autovalori. In particolare si hanno le seguenti proprietà:

i. gli autovalori sono le radici dell'*equazione secolare* generalizzata

$$\det\,(B - \lambda A) \;=\; 0 \;, \tag{3.111}$$

che è un'equazione algebrica di grado n per λ.

ii. Se B, come nel nostro caso, è simmetrica, allora gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono reali, e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}$ si possono prendere "ortonormali con riferimento alla matrice A," nel senso che soddisfano la condizione

$$A\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(j)} = \delta_{ij} \;. \tag{3.112}$$

iii. Se anche B è definita positiva, allora gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono positivi.

iv. Se denotiamo con U la matrice di elementi $U_{ij} = u_i^{(j)}$ $\bigl($ove si è posto $\mathbf{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)})\bigr)$, allora la matrice $U^T AU$ concide con l'identità, e simultaneamente la matrice $U^T BU$ è diagonale, precisamente si ha $(U^T BU)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.

---

[59] Corrispondente a quello già usato nel primo capitolo; si veda anche il procedimento analogo per le equazioni alle derivate parziali.

[60] Si vede così in particolare che in un movimento di questo tipo tutte le coordinate seguono l'identica legge temporale. Una situazione analoga si presenta anche nello studio delle equazioni alle derivate parziali, quando si ricercano soluzioni particolari a variabili separate per la parte temporale e per la parte spaziale (modi normali di oscillazione).

[61] Si potrebbe anche scrivere $A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}$, escludendo però il caso $B\mathbf{u} = 0$ con $A\mathbf{u} \neq 0$. Il caso $A\mathbf{u} = 0$ con $B\mathbf{u} \neq 0$ non può invece presentarsi (A è non singolare).

La proprietà i) segue, come per l'ordinaria equazione agli autovalori, dal fatto che il sistema omogeneo $(B - \lambda A)\mathbf{u} = 0$ deve avere soluzioni non banali; la proprietà ii) si ottiene, come si potrebbe facilmente vedere, con una spontanea generalizzazione della corrispondente dimostrazione per l'ordinaria equazione agli autovalori; la proprietà iii) segue dal fatto che, per la (3.109), si ha $B\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i A\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i$ (si è usata la (3.112)), e dunque, se B è definita positiva, $\lambda_i = B\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} > 0$; infine, la proprietà iv) è una immediata conseguenza della (3.112), infatti si ha $(U^T AU)_{ij} = A\mathbf{u}^{(j)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \delta_{ij}$, e analogamente $(U^T BU)_{ij} = B\mathbf{u}^{(j)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_j A\mathbf{u}^{(j)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_j \delta_{ij}$.

3.9.3 *Modi normali di oscillazione e coordinate normali*

Il caso più interessante è quello in cui il punto di equilibrio è stabile, e la stabilità si può riconoscere dal fatto che V ha in $\mathbf{q}^* = 0$ un minimo quadratico. In questo caso la matrice B è definita positiva, e dunque possiamo scrivere

$$\lambda_i \, = \, \omega_i^2 \, > \, 0 \; , \qquad i = 1, \ldots , n \; .$$

L'equazione (3.110) per τ corrispondente all'autovalore λ_i è allora quella per l'oscillatore armonico di pulsazione ω_i, e il suo integrale generale si scrive, ad esempio, $\tau^{(i)}(t) = \mathcal{A}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. Corrispondentemente, l'integrale generale della (3.108) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{q}(t) \, = \, \sum_{i=i}^{n} \mathcal{A}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \mathbf{u}^{(i)} \; ; \tag{3.113}$$

si osservi che esso contiene $2n$ costanti arbitrarie, la cui scelta è equivalente alla scelta del dato iniziale $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. E' interessante il caso in cui una sola delle ampiezze $\mathcal{A}_1, \ldots , \mathcal{A}_n$ sia diversa da zero, ad esempio $\mathcal{A}_k = 1$ e $\mathcal{A}_i = 0$ per $i \neq k$: come si vede dalla (3.113), in questo caso troviamo soluzioni particolari della forma

$$q_h(t) = U_{hk} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \; , \qquad h = 1, \ldots , n \; ,$$

che sono periodiche, anzi armoniche di ugual periodo e fase per tutte le variabili. *Il moto complessivo è periodico.* E' questo un fatto eccezionale, che scompare in genere se si scelgono due o più ampiezze $\mathcal{A}_h$ diverse da zero (a meno che le corrispondenti pulsazioni non siano a due a due commensurabili, nel qual caso il moto resta periodico; per esercizio lo si verifichi). Questi particolari moti periodici del sistema prendono il nome di *"modi normali di oscillazione"*, e sono di fondamentale importanza in ogni campo della fisica o dell'ingegneria, ovunque vi siano sistemi oscillanti di qualunque natura (dalle antenne ai grattacieli agli strumenti musicali). La (3.113) mostra che l'integrale generale delle equazioni di Lagrange linearizzate si scrive come sovrapposizione di modi normali.

E' infine interessante eseguire il cambiamento di coordinate $\mathbf{q} = U\mathbf{x}$ nella lagrangiana troncata (3.107). Scrivendo quest'ultima nella forma compatta

$$L^* = \frac{1}{2} A\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} B\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \; ,$$

si vede immediatamente che la nuova lagrangiana $L'(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = L(U\mathbf{x},U\dot{\mathbf{x}})$ è data da $L' = \frac{1}{2}(U^TAU)\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(U^TBU)\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$; per la proprietà iv) sopra enunciata si ha allora

$$L' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \ , \tag{3.114}$$

e dunque corrispondentemente le equazioni del moto si disaccoppiano, precisamente si ha

$$\ddot{x}_i \ = \ -\lambda_i x_i \ , \qquad i = 1,\ldots,n \ . \tag{3.115}$$

Le coordinate $x_1,\ldots,x_n$ prendono esse stesse il nome di *coordinate normali* del sistema. La (3.114) e la (3.115) mostrano una cosa di importanza fondamentale: qualunque sistema lagrangiano, linearizzato attorno a un punto di equilibrio stabile (la cui stabilità sia riconoscibile dall'analisi delle derivate seconde del potenziale) è equivalente, tramite una trasformazione lineare di coordinate, a un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati. Si osservi che anche l'energia del sistema linearizzato prende la forma

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \ , \qquad E_i = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) \ ,$$

come se si trattasse di un sistema di n oscillatori materiali.

Il passaggio alle coordinate normali si può fare, naturalmente, indipendentemente dal segno degli autovalori λ_i; in ogni caso si ottengono le equazioni (3.115), tra loro disaccoppiate, che a seconda dei casi si possono interpretare come equazioni di un oscillatore armonico ($\lambda_i > 0$), di una particella libera ($\lambda_i = 0$), o di un repulsore armonico ($\lambda_i < 0$). Il caso trattato sopra, in cui tutti gli autovalori λ_i sono positivi, è tuttavia il più interessante.

- **Osservazione** *(Diagonalizzazione simultanea di due matrici).* Come è noto, la diagonalizzazione di una sola matrice simmetrica si può sempre effettuare con una trasformazione di coordinate ortogonale (uno spostamento rigido del sistema di assi coordinati); la diagonalizzazione simultanea di due matrici A e B – salvo il caso eccezionale in cui esse commutino – non si può invece ottenere con una trasformazione ortogonale. La diagonalizzazione simultanea è tuttavia sempre possibile, con un più generale cambiamento lineare di coordinate, purché entrambe le matrici siano simmetriche, e una almeno di esse, diciamo A, sia definita positiva. Per convincersene, bastano poche considerazioni di carattere geometrico: restringiamoci per semplicità al caso piano, e ricordiamo che ad ogni matrice simmetrica è naturalmente associata una conica centrata nell'origine; per la matrice A, che è definita positiva, si tratta di una ellisse. La trasformazione ortogonale che diagonalizza l'una o l'altra matrice altro non è che la rotazione che porta gli assi coordinati a coincidere con gli assi di simmetria della conica. Si vede bene allora che è possibile diagonalizzare simultaneamente le matrici, eseguendo in successione le tre seguenti trasformazioni lineari: i) una rotazione R_1, che porta gli assi coordinati sugli assi di simmetria dell'ellisse associata ad A; ii) una dilatazione D lungo i nuovi assi coordinati, che muta l'ellisse in un cerchio (con questa trasformazione, non ortogonale, la conica associata a B muta assi di simmetria, ma resta una conica centrata nell'origine); iii) una rotazione R_2, che porta gli assi coordinati a coincidere con i nuovi assi di simmetria della seconda conica (mentre il cerchio resta un cerchio). La trasformazione $U = R_2 D R_1$ diagonalizza simultaneamente A e B, ed anzi muta A nella matrice identità. La generalizzazione a $n > 2$ è ovvia.

3.9.4 Linearizzazione e stabilità

Dalle equazioni disaccoppiate (3.115) si vede immediatamente che, per il problema linearizzato, l'origine è punto di equilibrio stabile se tutte le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dell'equazione secolare sono positive, mentre è instabile se almeno una di esse è negativa o nulla. Come si è visto nel Capitolo 1, le proprietà di stabilità dell'equilibrio per il sistema linearizzato non si trasportano sempre in modo banale al corrispondente problema non lineare; ciò avviene però, per i particolari sistemi lagrangiani conservativi di cui ci stiamo occupando, proprio nei casi di maggior interesse: precisamente, si dimostra che

i. se tutte le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono positive, allora l'equilibrio è stabile anche per il sistema non lineare;

ii. se una almeno delle radici è negativa, allora l'equilibrio è instabile anche per il sistema non lineare.

La prima proprietà è una immediata conseguenza del teorema di Lagrange–Dirichlet: infatti, se tutte le radici sono positive, allora V ha certamente un minimo nel punto di equilibrio, e la stabilità è garantita. La verifica della seconda proprietà (peraltro assai intuitiva) è invece più delicata, e la ometteremo.

L'unico caso in cui non è possibile trarre immediate conclusioni è dunque quello (non generico) in cui nessuno dei λ_i è negativo, e uno almeno di essi è nullo; in tutti gli altri casi si ha invece che il punto di equilibrio è stabile, per il problema non lineare come per quello lineare, se e solo se l'energia potenziale ha in esso un minimo. D'altra parte, il caso indeciso è anche l'unico in cui non si può stabilire, esaminando le sole derivate seconde, se l'energia potenziale abbia o meno un minimo. Si conclude pertanto che, come già anticipato sopra, se ci si restringe al caso generico in cui la presenza o meno del minimo in V si può stabilire dall'esame delle derivate seconde, allora la condizione di stabilità di Lagrange–Dirichlet diviene necessaria oltre che sufficiente.

- **Osservazione.** Si vede in particolare che, per i sistemi di cui ci stiamo occupando, la stabilità del caso lineare implica quella del sistema non lineare. Questa proprietà, che a prima vista può sorprendere, è strettamente legata al fatto che abbiamo escluso la presenza di forze non conservative (si pensi ad esempio all'effetto di un termine del tipo $\pm\mu x^2 \dot{x}$, o $\pm\mu\dot{x}^3$, nell'equazione dell'oscillatore armonico).

APPENDICE

Vediamo qui un semplice esempio di vincolo non olonomo, precisamente lo "sci che non derapa". Uno sci che si muova liberamente sul piano $x\,y$ è individuato da tre coordinate: le coordinate x, y di un suo punto, che possiamo convenire sia il punto P al centro dell'attacco, e l'angolo φ che lo sci forma con una direzione prefissata, ad esempio l'asse x. Dicendo che lo sci "non derapa", intendiamo dire che la velocità $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ di P è necessariamente parallela allo sci, cioè al versore $\mathbf{e} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$; di conseguenza si ha $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$, ovvero $\sin\varphi \mathrm{d}x - \cos\varphi \mathrm{d}y = 0$. Abbiamo dunque la condizione differenziale

$$f_x(x,y,\varphi)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y,\varphi)\,\mathrm{d}y + f_\varphi(x,y,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \;=\; 0 \;, \tag{3.116}$$

con $f_x = \sin\varphi$, $f_y = -\cos\varphi$, $f_\varphi = 0$. E' facile verificare che le relazioni di chiusura non sono soddisfatte, comunque si prenda il "fattore integrante" λ: posto infatti $g_x = \lambda(x,y,\varphi)f_x$, $g_y = \lambda(x,y,\varphi)f_y$, $g_\varphi = \lambda(x,y,\varphi)f_\varphi$, si ha $g_\varphi = 0$ e dunque le relazioni di di chiusura $\frac{\partial g_x}{\partial\varphi} = \frac{\partial g_\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial g_y}{\partial\varphi} = \frac{\partial g_\varphi}{\partial y}$, conducono al sistema

$$\begin{cases} \lambda\cos\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\sin\varphi = 0 \\ -\lambda\sin\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\varphi = 0 \end{cases} ,$$

omogeneo, e risolto solo da $\lambda = 0$.

In questo esempio abbiamo eseguito, per esercizio, la trattazione analitica dettagliata. Che il vincolo non sia olonomo, lo si vede però *a priori,* in modo immediato: infatti, presa comunque una configurazione (x,y,φ), è chiaro che da essa si può raggiungere qualunque altra configurazione (x',y',φ'), compiendo soltanto spostamenti conformi al vincolo (3.116): basta ruotare lo sci attorno a P, facendolo puntare su (x',y'), poi raggiungere (x',y') con velocità parallela alla direzione dello sci, infine ruotarlo ancora fino a raggiungere l'orientazione φ' desiderata. Ciò esclude che possa esistere una limitazione alle configurazioni raggiungibili a partire da una condizione assegnata, espressa da una legge intera $F(x,y,\varphi) = 0$.

- **Esercizio 3.15:** Si dimostri che il vincolo di puro rotolamento per una ruota *sul piano* non è olonomo (si supponga ortogonale al piano la giacitura della ruota).

  Suggerimento: si individui la configurazione della ruota con le quattro coordinate x, y, φ e ϑ, ove x, y sono le coordinate del mozzo della ruota, φ è l'angolo formato dal piano della ruota con l'asse x, e ϑ è l'angolo formato da un particolare raggio con la verticale. Il vincolo che il punto di contatto con il suolo abbia velocità nulla si traduce nelle due relazioni $\dot{x} + R\dot{\vartheta}\cos\varphi = 0$ e $\dot{y} + R\dot{\vartheta}\sin\varphi = 0$, ove intervengono le velocità. Non è difficile dimostrare, procedendo come per lo sci, che queste relazioni non sono compatibili con nessuna relazione intera; come sopra, si può procedere per via analitica, oppure verificare direttamente che a partire da qualunque configurazione si può raggiungere qualunque altra configurazione, compiendo movimenti conformi ai vincoli.