CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani

18 Novembre 2003

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità del punto di equilibrio;
(b) scrivere il flusso integrale;
(c) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^3 - x - \gamma\frac{dx}{dt}$$

si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$:
a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità;
b) si traccino qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia;
c) si descrivano l'insieme α-limite e quello ω-limite dell'orbita con condizioni iniziali $x = 1/2, y = dx/dt = 0$.
Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo:
d) si determini la stabilità dei punti di equilibrio;
e) si traccino qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e si tratteggi il bacino di attrazione del pozzo;
f) si dimostri che l'orbita con condizioni iniziali $x = 1/2, y = dx/dt = 0$ ha limite per $t \to +\infty$.