CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani

9 Gennaio 2004

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\tan x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

con $\gamma > 0$ un parametro, esso ha nel punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ un punto di equilibrio stabile per $|\gamma| < 2$.
a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:

$$D^2 \simeq \frac{\Delta_0^2}{h^2} \quad ; \quad D \simeq \frac{\Delta_-}{h}$$

e quindi in un sistema dinamico discreto usando come seconda variabile la differenza prima all'indietro $y_k = x_k - x_{k-1}$;
b) Si trovino i punti fissi del sistema dinamico discreto e se ne calcoli la linearizzazione;
c) Si trovi per quali valori di γ i punti fissi hanno autovalori complessi con moltiplicatori di Lyapounov < 1; si noti che l'insieme di tali valori di γ dipende da h, e per $h \to 0$ tende all'intervallo $|\gamma| < 2$.

Esercizio 2: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio ℓ nel piano verticale (x, z), per esempio parametrizzata dall'angolo al centro misurato dal punto più in basso:

$$\begin{cases} x = \ell \sin\theta \\ z = -\ell\cos\theta \end{cases}$$

e supponiamo che esso sia soggetto sia ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g sia alla forza di richiamo di una molla di costante elastica k^2 con estremo libero di scorrere sulla retta $z = \ell$. In altre parole, l'energia potenziale totale delle due forze sia

$$V = m\, g\, z + \frac{k^2}{2}\,(\ell - z)^2$$

a) Si scrivano l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $\theta, d\theta/dt$, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ℓ, k;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b), sempre in funzione dei parametri;
d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei principali casi.