CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani

12 Gennaio 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C\ \sinh(x)$$

con C un parametro.
a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:

$$D^2x(kh) \simeq \frac{\Delta_0^2\, x_k}{h^2} \quad ; \quad Dx(kh) \simeq \frac{\Delta_- x_k}{h} \quad ;$$

e quindi in un sistema dinamico discreto usando come variabile

$$y_k = \frac{\Delta_- x_k}{h}\,;$$

b) si trovino i punti fissi del sistema dinamico discreto e si calcoli la linearizzazione del sistema in tali punti;
c) si trovi per quali valori di C i punti fissi hanno autovalori complessi con moltiplicatori di Lyapounov $= 1$;
d) si trovi per quali valori di C i punti fissi sono iperbolici, e si dimostri che per $h \to 0$ le tangenti alle separatrici del sistema discretizzato nei punti fissi tendono alle tangenti alle separatrici del sistema continuo nei punti di equilibrio;
e) si disegnino qualitativamente le separatrici del sistema discretizzato;
f) (*facoltativo*) dimostrare che le separatrici instabili del sistema discretizzato tendono all'infinito con rapporto y/x che tende ad un limite finito, e trovarne il valore.
Suggerimento: notare che le separatrici instabili sono contenute nei quadranti $\{x, y > 0\}$ e $\{x, y < 0\}$.

Esercizio 2: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una curva di equazione $z = 1 - exp(-x^2/2)$ nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto sia ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g.
a) Si scrivano l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $x, dx/dt$, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b), sempre in funzione del parametro $J = \omega^2/g$;
d) Si tracci il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x);
e) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi qualitativamente distinti.