CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

20 Gennaio 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico discreto lineare:

$$X_{k+1} = A\, X_k \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Si trovi la forma canonica di Jordan reale della matrice A;
b) si determinino le condizioni inziali per le quali l'orbita X_k per $k \geq 0$ è limitata;
c) si determinino le condizioni inziali per le quali

$$\lim_{k \to +\infty} X_k = \infty \ .$$

Esercizio 2: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su una parabola di equazione $z = x^2 - 1$ in un piano verticale (x, z).
Supponiamo che il corpo sia soggetto a un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità g, e alla forza di richiamo di una molla di costante elastica k con estremo libero di scorrere sull'asse x.
a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, k;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, x) con $J = mg/k$.
d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi principali;
e) Supponiamo adesso che il sistema venga fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse verticale z. Si trovino i punti di equilibrio nel sistema di riferimento ruotante e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri m, g, k, ω.