

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

10 Febbraio 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare:

$$\frac{dX}{dt} = A X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

- Si trovi la forma canonica di Jordan reale della matrice A ;
- si determinino le condizioni iniziali per le quali l'orbita $X(t)$ per $t \geq 0$ è limitata;
- Si trovi la soluzione con condizioni iniziali $X_0 = (2, 0, 0)$.

Esercizio 2: Sia dato un corpo puntiforme di massa m , vincolato a muoversi su un'iperbole di equazione $z = -1/r$ in un piano verticale (r, z) . Supponiamo che il corpo sia soggetto a un'accelerazione di gravità, rivolta verso la direzione delle z negative, di intensità g . Supponiamo inoltre che il piano (r, z) sia mantenuto in rotazione attorno all'asse z da forze esterne con velocità angolare costante ω .

- Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
- Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω ;
- Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci un disegno qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Si consideri il sistema dinamico gradiente con potenziale

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} + x^2 (x + 1) .$$

- Si scrivano le equazioni differenziali e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico;

- b) si determini la stabilità o meno dei punti di equilibrio;
- c) si determini il bacino di attrazione di ciascuno dei punti di equilibrio;
- d) si determinino le condizioni iniziali per le quali l'orbita va all'infinito per $t \rightarrow +\infty$.