# CORSO DI SISTEMI DINAMICI
# COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

24 Giugno 2005

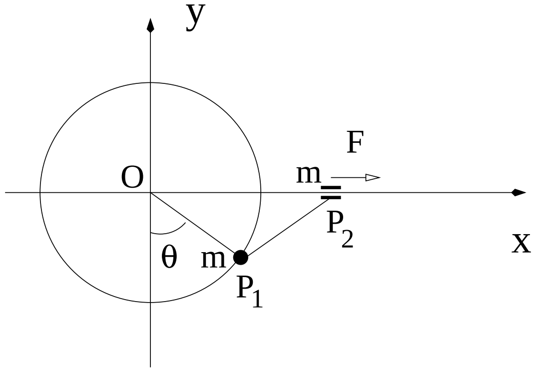
**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\frac{dX}{dt} = A\,X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) si discuta la stabilità dell'origine per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$;
b) si calcoli la soluzione particolare con condizione iniziale

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

**Esercizio 2:** Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali $P_1$, $P_2$, di ugual massa $m$, vincolati a stare in un piano verticale $Oxy$ e collegati tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza $R$. Il punto $P_1$ è inoltre vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio $R$ centrata nell'origine $O$ ed il punto $P_2$ è vincolato a muoversi sull'asse $x$ (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità e sul solo corpo $P_2$ agisce una forza costante, di intensità $F > 0$, diretta nel verso dell'asse $x$.



a) Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ che il vettore $OP_1$ forma con la direzione verticale (supposto crescente in senso antiorario) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano;

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio e si tracci un disegno qualitativo delle orbite.

**Esercizio 3:** Si consideri l'equazione ridotta del problema dei due corpi con l'aggiunta di un termine di dissipazione (radiale)

$$\ddot{r} = -\gamma\dot{r} + \frac{c^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

con $\gamma, c^2, G, M$ costanti positive:
a) scrivere la mappa standard del corrispondente sistema dinamico;
b) trovare i punti fissi della mappa e discuterne la stabilità.