CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

20 Settembre 2005

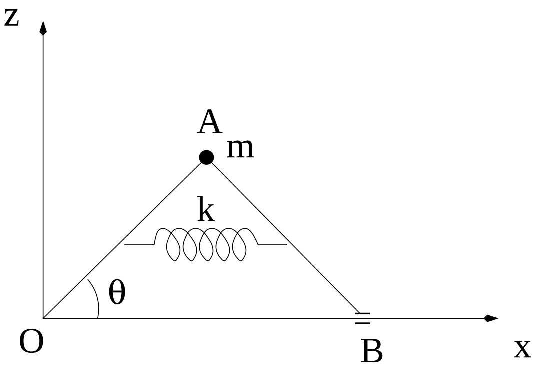
Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\frac{dX}{dt} = A\,X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

se ne calcoli il flusso integrale.

Esercizio 2: Discretizzare il sistema dinamico continuo tramite il metodo di Eulero e verificare se e per quali valori del passo h le condizioni di stabilità dell'origine per il sistema discreto sono le stesse del caso continuo.

Esercizio 3: Si fissi un sistema di riferimento con coordinate x, z in un piano verticale e si consideri in tale piano il sistema meccanico costituito da due sbarrette di ugual lunghezza ℓ e di massa trascurabile; le due sbarrette sono incernierate tra loro ad un estremo ed in tale punto viene saldato un corpo puntiforme di massa m (vedi figura). L'altro estremo della prima sbarretta è vincolato all'origine del riferimento e quello della seconda è vincolato a muoversi sull'asse x; inoltre i punti medi delle sbarrette sono collegate tra loro da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$.



a) Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che la prima sbarretta forma con l'asse x (supposto crescente in senso antiorario) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;

b) si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano;

c) si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro $J = \frac{mg}{k\ell} \neq 1$ e si tracci il diagramma di biforcazione;

d) si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei vari casi.