Meccanica Razionale e Analitica

13 Febbraio 2007

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'')^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^4([0,1]),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ \int_0^1 y dx = 1\}$$

e calcolarlo.

Secondo Esercizio

Un piano verticale è riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy con l'asse Oy verticale discendente. Un'asta pesante omogenea AB, di massa M ha gli estremi vincolati a scorrere su due guide rettilinee verticali del piano xOy poste a ugual distanza dall'asse Oy mantenendosi sempre orizzontale durante il moto. Su gli estremi A e B dell'asta si esercitano forze viscose di legge

$$\mathbf{F}_A = -h\mathbf{v}_A,\ \mathbf{F}_B = -h\mathbf{v}_B$$

dove $h > 0$ è una costante e $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ sono le velocità nei punti A e B dell'asta. Il centro G di un disco pesante omogeneo di massa m e raggio R è collegato al punto O tramite una molla di costante elastica $K > 0$. Il disco rotola senza strisciare sull'asta AB mantenendosi sempre nel piano verticale al di sotto dell'asta. Assumere come parametri lagrangiani le coordinate x_G y_G del centro del disco.

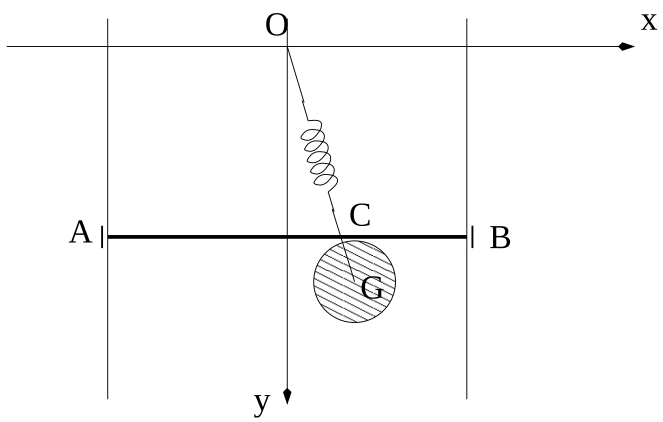

Figura 1

1) Trovare le equazioni di Lagrange del sistema.
2) Calcolare la soluzione delle equazioni di moto corrispondente alle condizioni iniziali:

$$x_G(0) = 0, \; \frac{dx_G}{dt}(0) = \beta, \; y_G(0) = \frac{g(M+m)}{k}, \; \frac{dy_G}{dt}(0) = 0$$

3)Calcolare la reazione vincolare che si esercita sul disco nel punto di contatto C con la sbarra e che corrisponde alla soluzione del punto 2).

Secondo Esercizio

In un piano verticale si consideri un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente. Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare sull'asse x ed un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R$ può a sua volta rotolare senza strisciare all'interno dell'anello (vedi Figura 2).

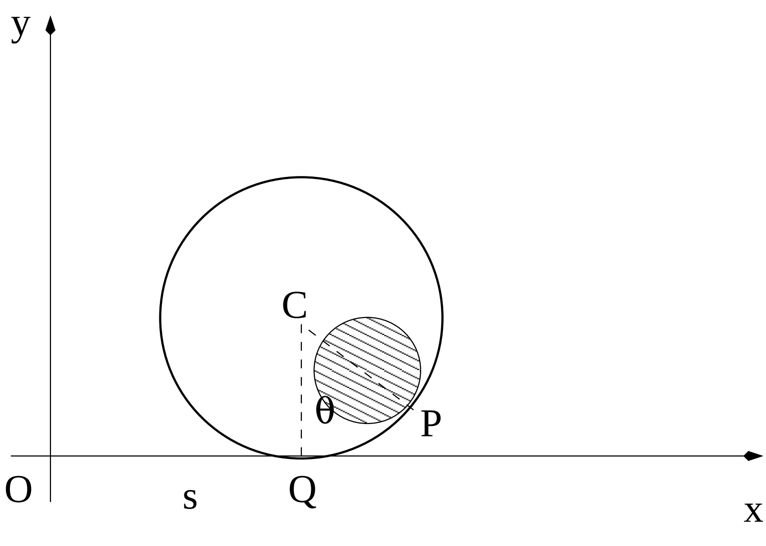

Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del baricentro C dell'anello e l'angolo θ, che il segmento che congiunge C con il punto di contatto P tra disco e anello forma con la direzione verticale,
1) si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
2) si trovino gli integrali primi del sistema.

Prova al calcolatore

calcolare con 8 cifre decimali esatte i numeri

$$\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)$$

per $n = 10$, $n = 10^2$, $n = 10^3$, $n = 10^4$, $n = 10^5$, $n = 10^6$, $n = 10^7$.