Meccanica Razionale e Analitica

15 Gennaio 2007

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 - 2yx)dx + (y(1))^2 + (y'(1))^2$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^4([0,1]),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0\}$$

e calcolarlo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale riferito a un sistema di coordinate cartesiane xOy di versori **i**, **j** un disco omogeneo pesante D_1 di raggio R e massa M ha il centro C_1 vincolato a scorrere lungo l'asse y (orientato verso l'alto) mentre un secondo disco omogeneo pesante D_2, di egual massa e raggio, rotola senza strisciare sull'asse x del riferimento cartesiano. Nel centro C_2 del disco D_2 è applicata una forza elastica attrattiva orizzontale di costante $k > 0$ diretta verso un punto fisso V dell'asse delle y.

Un'asta rigida omogenea pesante di lunghezza $2R$ e massa m ha gli estremi incernierati rispettivamente in C_1 e C_2 in modo che i due dischi restino sempre in contatto. Supporre che tutti i vincoli siano privi di attrito e che i due dischi rotolino senza strisciare uno sull'altro.

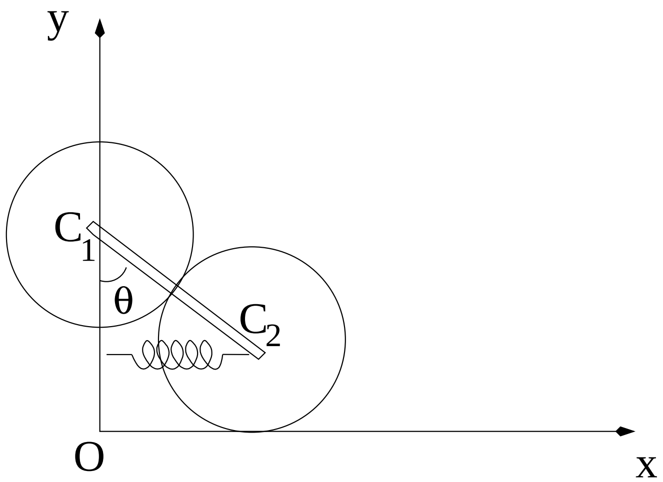

Figura 1

Assumere come parametro lagrangiano l'angolo θ della Figura 1.
1)Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
2)Trovare la lagrangiana del sistema e un integrale primo del moto.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si consideri un sistema di riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Si considerino due sbarrette omogenee di masse m, M e lunghezze ℓ, 3ℓ rispettivamente. Queste sbarrette sono incernierate nell'estremo P. La sbarretta PR ha inoltre un punto incernierato nell'origine O in modo che i segmenti PO ed OR abbiano lunghezze ℓ e 2ℓ rispettivamente. Inoltre l'estremo R è saldato ad un estremo di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; l'altro estremo della molla può scorrere liberamente sull'asse x (vedi Figura 2).

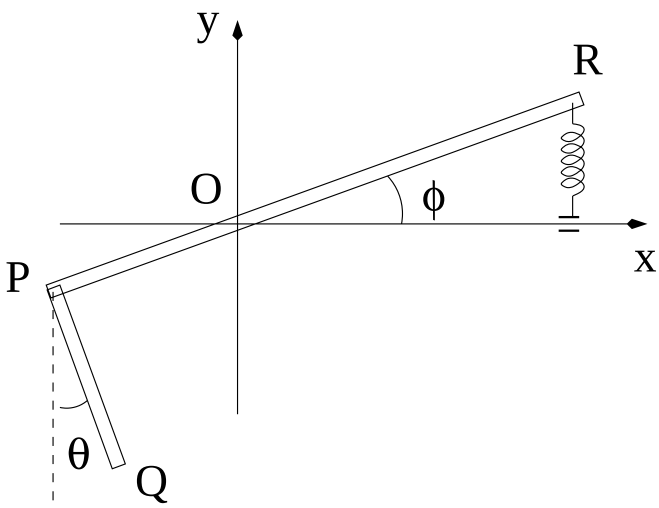

Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ, ϕ indicati in figura
i) si trovino tutte le posizioni di equilibrio al variare dei parametri;
ii) si dimostri che per $m = M/2$ il punto $(\theta, \phi) = (0, 0)$ è un equilibrio stabile;
iii) si calcolino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio del punto ii).

Prova al calcolatore

Trovare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2,\ y(0) = 2.$$

Tracciare il grafico della funzione $y(x)$ nell' intervallo $[0, 1/8]$. Trovare, per via numerica e con 9 cifre decimali esatte, l'area del sottografico della funzione $y(x)$ relativo all'intervallo $[0, 1/8]$. Trovare, per via numerica e con 9 cifre decimali esatte, l'area della superfice di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico di $y(x)$ attorno all'asse x nell'intervallo $[0, 1/8]$.