Meccanica Razionale e Analitica

9 Giugno 2006

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y'''(x)|^2 dx$$

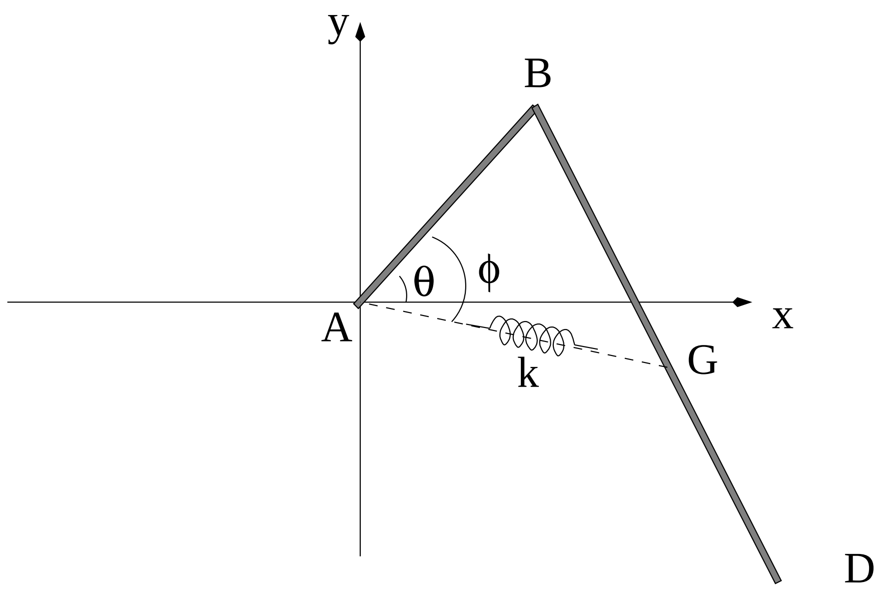
ha minimo assoluto nella classe delle funzioni $C^3([0,1])$ tali che

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3,\ y''(1) = 6.$$

Secondo Esercizio

Un piano orizzontale è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Axy. In questo piano è libero di muoversi senza attrito un sistema formato da due aste omogenee AB e BD entrambe di massa m e di lunghezze rispettive L e $2L$. L'asta AB è vincolata a muoversi attorno al suo punto fisso A coincidente con l'origine del riferimento cartesiano. Mentre l'asta BD è incernierata con la prima asta nell'estremo B. Sul baricentro G dell'asta BD agisce una forza elastica attrattiva di costante $k > 0$ diretta verso il punto A. Si assumano come parametri lagrangiani del sistema l'angolo θ che l'asse Ax forma con l'asta AB e l'angolo ϕ che il segmento AG forma con l'asta AB (vedi figura).

Trovare la lagrangiana del sistema e due integrali primi del moto.



Terzo Esercizio

Si consideri un corpo puntiforme P di massa m vincolato a muoversi su un piano orizzontale e liscio. Su P agisce una forza elastica, di costante $k > 0$, che attira il corpo verso un centro O.
Utilizzando come variabili lagrangiane le coordinate polari (r, θ), dove r è la distanza di P da O e θ è l'angolo che il segmento OP forma con una direzione fissa nel piano del moto,

(i) si scrivano la lagrangiana L del sistema e le equazioni di Lagrange;

(ii) osservando che la variabile θ è ciclica, si consideri il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

e si dimostri che l'integrale primo $|p_\theta|$ è la norma del momento angolare di P rispetto al polo O.

(iii) si scriva la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh;

(iv) Si dimostri che se il momento angolare del corpo rispetto al polo O è diverso da zero, allora il corpo, durante il suo moto, non può mai passare per il punto O.

Prova al calcolatore

(a) Trovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.
(b) Studiare tramite MAPLE i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2).$$

Determinare il minimo ed il massimo assoluto della $f(x, y)$ nel disco chiuso che ha il centro nell'origine e raggio 3.