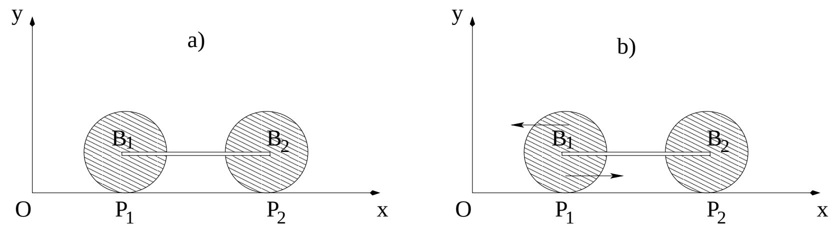
Esercizio: Si consideri il sistema meccanico piano formato da due dischi omogenei $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ di massa m e raggio R i cui baricentri B_1, B_2 sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza $\ell > 2R$. I dischi possono rotolare senza strisciare sull'asse x di un sistema di riferimento Oxy verticale (vedi figura).

a) Utilizzando come coordinata l'ascissa s del baricentro B_1 si scriva l'equazione del moto del sistema e se ne determini il moto. Si trovino inoltre le componenti delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$, esercitate in P_1, P_2, lungo la direzione dell'asse x.

b) Si applichi al disco $\mathcal{D}_1$ un motorino di massa trascurabile, che genera sul disco una coppia di forze di momento $L\mathbf{e}_3$.[1] Assumiamo per semplicità le condizioni iniziali $s(0) = \dot{s}(0) = 0$: come cambiano le risposte al punto precedente?



a) Siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i versori di un riferimento di $\mathbf{R}^3$ con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ orientati come gli assi x e y rispettivamente. Siano inoltre $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ le accelerazioni dei baricentri B_1, B_2.

La prima equazione cardinale per il sistema composto dai due dischi e dall'asta è

$$m(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = -2mg\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \tag{1}$$

che, proiettata lungo $\mathbf{e}_1$, diventa

$$2m\ddot{s} = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,1} \tag{2}$$

con $\Phi_{1,1} = \mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{e}_1$, $\Phi_{2,1} = \mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{e}_1$.

Siano P_1, P_2 i punti dei due dischi a contatto con l'asse x. La seconda equazione cardinale per il solo disco $\mathcal{D}_1$ rispetto al suo baricentro B_1 si scrive

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_1} = \mathbf{N}_{B_1}\ .$$

Il momento angolare $\mathbf{M}_{B_1}$ è dato da

$$\mathbf{M}_{B_1} = \mathcal{I}_{B_1}\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{mR}{2}\dot{s}\,\mathbf{e}_3$$

dove $\mathcal{I}_{B_1}$ è l'operatore di inerzia di $\mathcal{D}_1$ relativo al polo B_1 ed $\boldsymbol{\omega}_1 = -\dot{s}/R\,\mathbf{e}_3$ è la velocità angolare del disco $\mathcal{D}_1$, che è un autovettore di $\mathcal{I}_{B_1}$ con autovalore relativo $mR^2/2$.

[1] il momento di una coppia è indipendente dal polo rispetto a cui si calcola

Il momento risultante delle forze $\mathbf{N}_{B_1}$ è dato da

$$\mathbf{N}_{B_1} = (P_1 - B_1) \times \boldsymbol{\Phi}_1 = R\,\Phi_{1,1}\mathbf{e}_3$$

per cui, proiettando lungo $\mathbf{e}_3$, si ottiene l'equazione scalare

$$-\frac{m}{2}\ddot{s} = \Phi_{1,1}\ . \tag{3}$$

Analogamente la seconda equazione cardinale per il solo disco $\mathcal{D}_2$ rispetto al polo B_2, proiettata lungo $\mathbf{e}_3$, ci dà

$$-\frac{m}{2}\ddot{s} = \Phi_{2,1}\ . \tag{4}$$

Dalle equazioni (2), (3) e (4) otteniamo che il baricentro del sistema (e quindi quello di ciascun disco) si muove di moto rettilineo uniforme ($\ddot{s} = 0$) e le componenti delle reazioni vincolari in P_1, P_2 lungo l'asse x sono nulle ($\Phi_{1,1} = \Phi_{2,1} = 0$).

b) La prima equazione cardinale per il sistema composto dai due dischi e dall'asta e la seconda equazione cardinale per il solo disco $\mathcal{D}_2$ rispetto a B_2 restano invariate; cambia invece la forma della seconda equazione cardinale per il disco $\mathcal{D}_1$ rispetto a B_1, che si scrive

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_1} = (R\,\Phi_{1,1} + L)\,\mathbf{e}_3$$

e, proiettata lungo $\mathbf{e}_3$, diventa

$$-\frac{m}{2}\ddot{s} = \Phi_{1,1} + \frac{L}{R}\ . \tag{5}$$

Dalle equazioni (2), (4) e (5) otteniamo l'equazione di moto

$$3m\ddot{s} = -\frac{L}{R}$$

che, date le condizioni iniziali $s(0) = \dot{s}(0) = 0$, ha per soluzione

$$s(t) = -\frac{Lt^2}{6mR}\ .$$

Quindi il baricentro del sistema si muove di moto uniformemente accelerato e le componenti delle reazioni vincolari in P_1, P_2 nella direzione dell'asse x sono

$$\Phi_{1,1} = -\frac{5L}{6R}\,; \qquad \Phi_{2,1} = \frac{L}{6R}\ .$$