Meccanica Razionale e Analitica

13 Luglio 2006

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y''(x)|^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni $C^2([0,1])$ tali che

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ \int_0^1 xy(x)dx = 2.$$

Secondo Esercizio

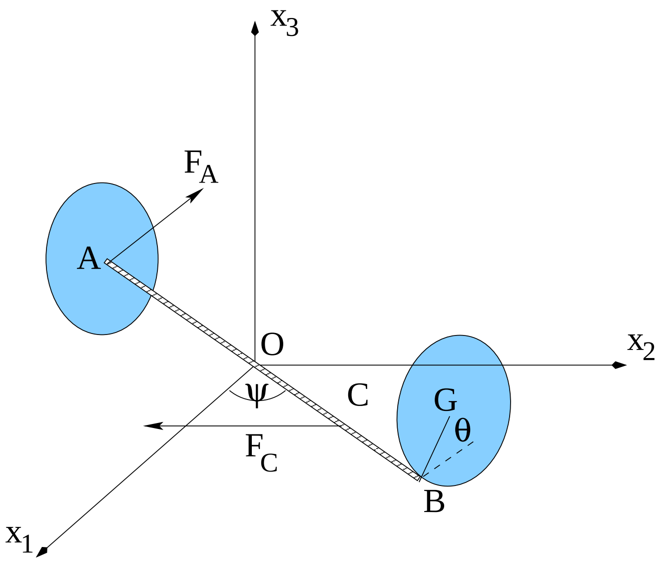

Figura 1

È dato un riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$ di versori $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ che si suppone inerziale e con il versore $\mathbf{e_3}$ verticale ascendente. Un'asta materiale di massa M e lunghezza L e di estremi A e B è libera di ruotare nel piano x_1, x_2 con il suo punto medio sempre coincidente con l'origine del riferimento $Ox_1x_2x_3$. Nell'estremo A dell'asta è saldato il centro di un disco di massa m e raggio R con giacitura perpendicolare all'asta. Un secondo disco di massa m e raggio R è libero di ruotare nel piano perpendicolare

all'asta nel suo estremo B con un punto della sua circonferenza vincolato in B. In A è applicata una forza costante $\mathbf{F_A}$ di modulo F, direzione sempre coincidente con quella del versore $\mathbf{e_1}$ e verso opposto a quello del versore $\mathbf{e_1}$. Nel punto C, medio del segmento OB, è applicata una seconda forza costante $\mathbf{F_C}$ di modulo $2F$, di direzione parallela a quella del versore $\mathbf{e_2}$ e con verso opposto a quello di tale versore. Assumere come parametri lagrangiani l'angolo ψ fra il vettore OB e il versore $\mathbf{e_1}$ e l'angolo θ tra il diametro del secondo disco passante per B e il piano orizzontale.
(i) Trovare le equazioni di Lagrange del sistema.
(ii) Determinare le soluzioni di equilibrio delle equazioni di moto.
(iii) Supporre $F = 0$. Trovare due integrali primi del moto.
(iv) Nell'ipotesi che $\mathbf{F_A}$ e $\mathbf{F_C}$ siano nulle, determinare il legame fra le costanti θ_0 e Ω in modo che le equazioni di moto abbiano la soluzione

$$\psi(t) = \Omega t, \ \theta(t) = \theta_0.$$

Terzo Esercizio

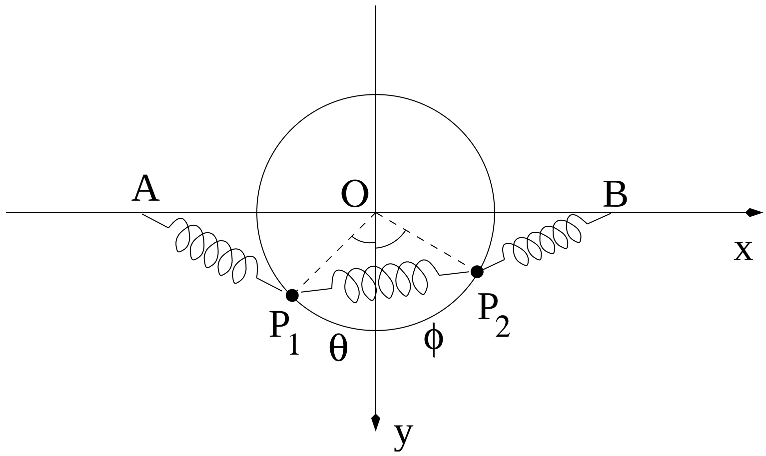

Figura 2

In un piano orizzontale Oxy si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali P_1, P_2 di massa m vincolati a muoversi su di una circonferenza di raggio $R = 1$ centrata nell'origine O. I due punti sono collegati da una molla di costante $\lambda > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Altre due molle, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collegano rispettivamente il punto P_1 al punto $A \equiv (-2, 0)$ ed il punto P_2 al punto $B \equiv (2, 0)$.
Utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli θ, ϕ che i segmenti OP_1 ed OP_2 formano con la direzione dell'asse y:

(i) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema al variare di λ;
(ii) nel caso $\lambda = k/2$ discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Prova al calcolatore

Trovare tramite MAPLE la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$y' - (x-1)y = x+1,\ \ y(2) = 1.$$

Calcolare con 10 cifre decimali

$$\int_1^2 y(x)dx\ .$$