Meccanica Razionale e Analitica
13 Settembre 2006
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 + y^2 - 2y\sin^2(x)\right) dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 2\pi]),\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi)\}.$$

Secondo Esercizio

È dato un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Una guida rettilinea orizzontale di massa trascurabile r passante per O è libera di ruotare nel piano xy. Un disco pesante e omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo la guida r mantenendosi costantemente nel piano verticale passante per r. Al centro C del disco è vincolato l'estremo di un'asta omogenea e pesante di massa m e lunghezza L. L'altro estremo A dell'asta è vincolato a muoversi lungo l'asse Oz. Tutti i vincoli sono privi di attrito. Si introducano come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ che l'asse Ox forma con la guida r e l'angolo θ che l'asse Oz forma con l'asta. Gli angoli sono orientati come in figura.

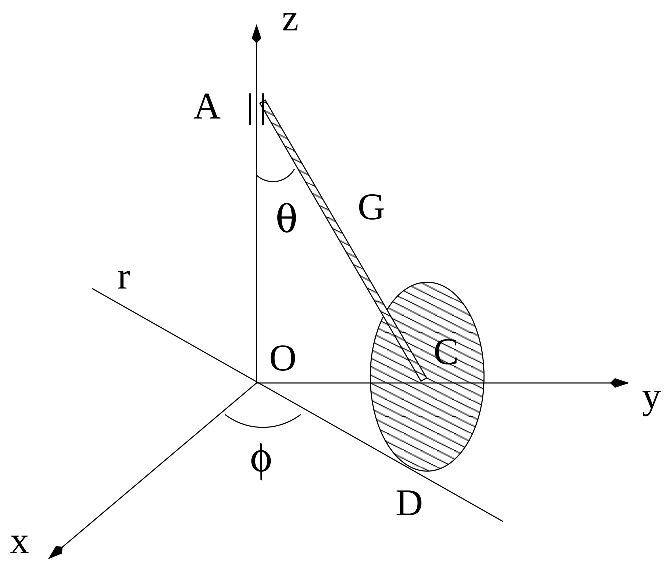

Figura 1

(a) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di moto.
(b) Trovare due integrali primi del moto.
(c) Date le condizioni iniziali

$$\phi(0) = 0,\ \frac{d\phi}{dt}(0) = 0,\ \theta(0) = \frac{\pi}{2},\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0\ (*)$$

provare che il moto corrispondente avviene nel piano $0xz$.
(d) Calcolare le reazioni vincolari in A e nel punto D di contatto tra il disco e la guida r all'istante iniziale se valgono le condizioni $(*)$.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale sono liberi di muoversi tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di masse $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. I punti sono collegati a due a due da molle di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k.
Siano $X_i \equiv (x_i, y_i)$, con $i = 1, 2, 3$, le coordinate cartesiane dei tre punti in un sistema di riferimento inerziale Oxy. Si considerino nuove coordinate $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ (*coordinate Jacobiane*) definite come segue:

$$\xi = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)}{3}\,; \qquad \eta = X_3 - X_2\,; \qquad \zeta = X_1 - \frac{(X_2 + X_3)}{2}\ .$$

Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate ξ, η, ζ e, dopo aver osservato che ci sono delle variabili cicliche, si trovi la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh. Qual'è l'interpretazione fisica di questa operazione di riduzione?

Prova al calcolatore

Trovare la soluzione $y_1(x)$ del problema

$$y'' = y - \sin^2(x),\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi).$$

Se

$$y_2(x) = \sin(x),\ y_3(x) = \sin^2(x),\ y_4(x) = 1/2 + \cos(4x)$$

calcolare

$$J(y_1),\ J(y_2),\ J(y_3),\ J(y_4),$$

dove $J(y)$ è il funzionale del primo esercizio.