Meccanica Razionale e Analitica

21 Giugno 2006

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y'''(x)|^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni $C^3([0,1])$ tali che

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Secondo Esercizio

Un piano verticale è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy con asse y rivolto verso il basso. In questo piano è libero di muoversi senza attrito un sistema formato da due aste omogenee di ugual lunghezza $2L$ e di egual massa m e da un punto materiale P di massa M. La prima asta OA ruota intorno al suo estremo O fisso e coincidente con l'origine del riferimento. La seconda asta BC è libera di ruotare intorno al suo baricentro che coincide sempre con l'estremo A dell'asta OA. Il punto materiale P è fissato nell'estremo B dell'asta BC. Il sistema è soggetto solo al proprio peso.

Supposti tutti i vincoli lisci ed assunti come parametri lagrangiani del sistema l'angolo θ che l'asta OA forma con l'asse Oy e l'angolo ϕ che l'asta BC forma con la retta orizzontale passante per B, orientati come in figura:

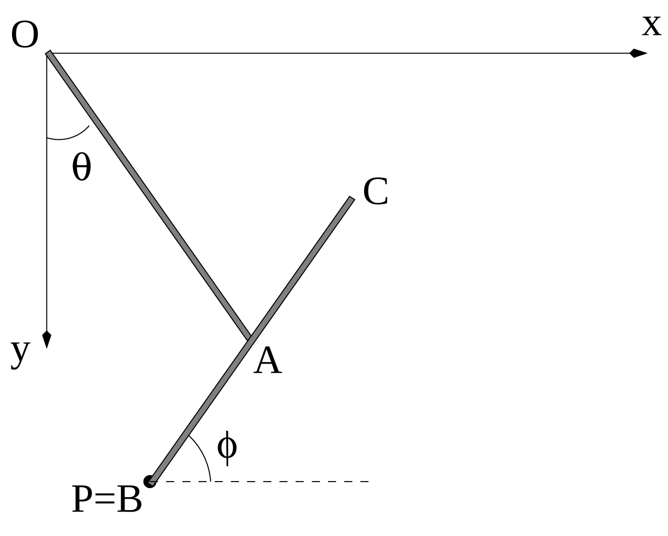

Figura 1

(i) trovare le equazioni di Lagrange del sistema.
(ii) Determinare le soluzioni di equilibrio delle equazioni di moto.
(iii) Supposte valide le condizioni iniziali

$$(1) \quad \theta(0) = \pi/2,\ \phi(0) = \pi/2,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0,\ \frac{d\phi}{dt}(0) = 0$$

calcolare $\frac{d^2\theta}{dt^2}(0)$ e $\frac{d^2\phi}{dt^2}(0)$.

Terzo Esercizio

In un piano verticale sia fissato un sistema di riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R, che può rotolare senza strisciare sull'asse x, e da un corpo puntiforme P di massa m che può scivolare senza attrito sul bordo circolare del disco. Al centro B del disco è saldato un estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla è fissato al punto $A \equiv (0, R)$, quindi la molla si mantiene sempre parallela all'asse x (vedi Figura 2).

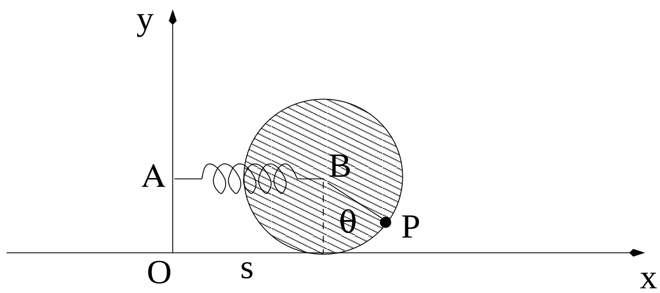

Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del centro B del disco e l'angolo θ che il segmento BP forma con la direzione verticale,
(a) scrivere la lagrangiana del sistema;
(b) trovare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
(c) assumendo $M = 2m$ e $kR = mg$ trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Prova al calcolatore

(a) Trovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.
(b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = e^{-x}y^3,\ y(0) = 1\ .$$