CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

30 Novembre 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità del punto di equilibrio;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \gamma\frac{dx}{dt}$$

dove $V(x)$ è una funzione C^2 definita su tutto $\mathbf{R}$ con le seguenti proprietà:
1) si annulla soltanto in $x = 0, 1, 2, 3, 4$, e in ognuno di questi punti cambia segno;
2) i limiti sono $+\infty$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$ per $x \to -\infty$;
3) in ogni intervallo tra due zeri c'è un solo punto stazionario non degenere (con derivate seconda non nulla) $x_i \in (i-1, i)$, per $i = 1, 2, 3, 4$, e non ce ne sono altri;
4) valgono le seguenti diseguaglianze: $V(x_1) < V(x_3)$ e $V(x_2) > V(x_4)$.
Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$:
a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità;
b) si traccino qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia;
Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo:
c) si determini la stabilità dei punti di equilibrio per γ abbastanza piccolo;
d) si traccino qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e si tratteggino i bacini di attrazione dei pozzi.