CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - dr. Giovanni Gronchi

11 Gennaio 2006

Esercizio 1: Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà con dissipazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\ e^{-x^2/2} - \gamma\ \frac{dx}{dt}$$

dove $\gamma > 0$.
a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:

$$D^2x(kh) \simeq \frac{\Delta_0^2\ x_k}{h^2} \quad ; \quad Dx(kh) \simeq \frac{\Delta_- x_k}{h} \quad ;$$

e quindi in un sistema dinamico discreto usando come variabile

$$y_k = \Delta_- x_k \,;$$

b) si trovino i punti fissi del sistema dinamico discreto e si calcoli la linearizzazione del sistema in tali punti;
c) si dimostri che tali punti fissi sono tutti asintoticamente stabili per $h < 1$ e $\gamma < 1$.

Esercizio 2: Si cerchi una trasformazione canonica $(p, q) \mapsto (w, z)$ tale che

$$z = atan(p + q)\ .$$

Suggerimento: usare la più semplice possibile funzione generatrice $F(q, z)$, quindi dedurre la relazione mancante da $-\partial F/\partial z = w$.

Esercizio 3: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una curva di equazione $z = x^4/4$ nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g.
a) Si scrivano l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $x, dx/dt$, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b), sempre in funzione del parametro $J = \omega^2/g$;
d) Si tracci il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x);
e) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi qualitativamente distinti.