CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

23 Gennaio 2006

Esercizio 1: Nel piano verticale Oxz si consideri il sistema meccanico formato da un punto materiale P di massa m vincolato a mantenere la stessa distanza ℓ dal punto O tramite una sbarretta di massa trascurabile. Il punto P è anche vincolato a mantenere la stessa distanza ℓ dal punto A, di massa trascurabile, libero di scorrere sull'asse x, vedi Figura 1. Sul punto A agisce una forza elastica di costante $k > 0$ e centro O. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ che OP forma con OA si scrivano le equazioni di Hamilton del sistema. Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabiità al variare dei parametri m, g, ℓ ,k.

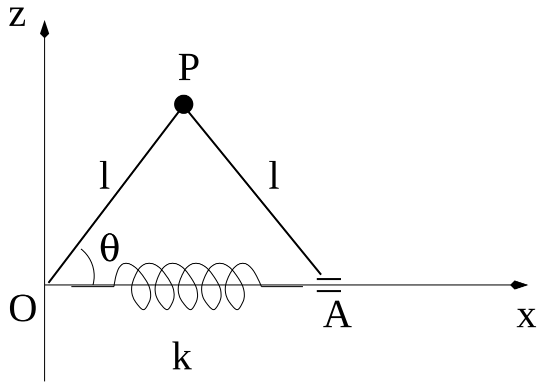

Figura 1:

Esercizio 2: Dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà, con dissipazione

$$\ddot{x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^5} - \gamma\,\dot{x} \qquad \gamma > 0\,,\ x > 0\,,$$

a) si trovino i punti di equilibrio, se ne calcoli la linearizzazione e se ne studi la stabilità e/o la stabilità asintotica;
b) si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel piano $(x, \dot{x})$;

c) si determini l'andamento per $t \to \pm\infty$ delle orbite con condizioni iniziali $(x, \dot{x}) = (3, 1/9)$ e $(x, \dot{x}) = (3/4, 0)$.

Esercizio 3: Si consideri la famiglia di trasformazioni della forma

$$w = A\, p^{\alpha} + B\, q^{\beta} \quad ; \quad z = C\, p^{\gamma} + D\, q^{\delta}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$ costanti.
Determinare per quali valori di tali costanti si ottengono delle trasformazioni canoniche.