CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

21 Febbraio 2006

Esercizio 1: Data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+1} = 2\, x_k - 2\, x_{k-1}$$

scrivere in forma esplicita la soluzione con condizioni iniziali $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Esercizio 2: Dato il potenziale

$$U(x,y) = arctg(x^2 - 1)\; arctg(1 - y^2)$$

si consideri il sistema dinamico gradiente

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} \; .$$

a) si trovino i punti di equilibrio, se ne calcoli la linearizzazione e se ne studi la stabilità e/o la stabilità asintotica;
b) si dimostri che il quadrato aperto $|x| < 1, |y| < 1$ è positivamente invariante;
c) si dimostri che le rette $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ e $y = -x$ sono invarianti;
d) si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel piano (x, y);
e) si dimostri che la curva $x = 0$ non è una separatrice.

Esercizio 3: Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\begin{cases} r &= S + R\cos q \\ z &= R\sin q \end{cases}$$

con S, R costanti, $S > R$, fatta ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Sul punto materiale non agisce alcuna forza esterna.
a) Si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton, l'energia totale;
b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità.