CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

7 giugno 2006

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema newtoniano a un grado di libertà

$$\ddot{x} = -x^3 - \gamma\,\dot{x}$$

con dissipazione $\gamma \in \mathbf{R}$
a) si studino i punti di equilibrio e se ne determinino le proprietà di stabilità in funzione di γ;
b) si dimostri che la funzione $L(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, con $y = \dot{x}$, non è una funzione di Lyapounov per $(0, 0)$.

Esercizio 3: Consideriamo due punti materiali $P_1 = (x_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, z_2)$ di massa m_1 e m_2 vincolati a muoversi in modo che la loro distanza sia fissa ed uguale ad ℓ (collegati da un'asta rigida senza massa) mantenendo $z_1 = 0$, $x_2 = 0$. Sui due punti agisce una forza peso diretta verso l'asse z negativo, di intensità $m_i\, g$ per $i = 1, 2$, e sul solo punto P_1 agisce una forza elastica dovuta ad una molla tra l'origine e P_1 con costante elastica k.
a) Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra il vettore $P_1 - P_2$ e l'asse z si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana, le equazioni di Hamilton e l'energia totale;
b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri m_1, m_2, k, g, ℓ;
c) si tracci il diagramma di biforcazione in funzione del parametro $m_2\, g/k\,\ell$.