CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

21 giugno 2006

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x\,(x + y + 1) \\ \dot{y} &= y(x + y - 1) \end{cases}$$

a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determinino le proprietà di stabilità;
b) si dimostri che l'insieme $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ è contenuto nel bacino di attrazione dell'origine.

Esercizio 3: Sia data l'ellisse nel piano $y = 0$ di equazione $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ fatta ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato alla curva ruotante e soggetto ad un'accelerazione di gravità $(0, 0, -g)$.
a) Usando come coordinata lagrangiana la u della parametrizzazione

$$x = a\,\sin u \quad ; \quad z = -b\,\cos u$$

si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana, le equazioni di Hamilton e l'energia totale;
b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri a, b, g, ω;
c) si tracci il diagramma di biforcazione in funzione del parametro

$$J = \frac{g\,b}{\omega^2 a^2}\ .$$