CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

13 settembre 2006

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.

Esercizio 2:
Sia dato un riferimento inerziale $Oxyz$ con asse z verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta rigida AB di massa trascurabile di lunghezza 2ℓ: l'estremo A dell'asta è libero di scorrere lungo l'asse z e l'estremo B può scorrere lungo una retta r incernierata nell'origine O e ruotante con velocità angolare costante ω. Nel punto medio dell'asta è saldato un corpo puntiforme di massa m, inoltre una molla di lughezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$ collega l'estremo B all'origine O. Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con l'asse z,
a) si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana, le equazioni di Hamilton e l'energia totale;
b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri m, k, g, ℓ, ω;
c) si tracci il diagramma di biforcazione in funzione del parametro

$$J = \frac{(4\,k - m\,\omega^2)\,\ell}{m\,g}\ .$$

Esercizio 3: Dato il sistema newtoniano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sinh x$$

lo si discretizzi in modo conservativo con passo h.
a) si scrivano le equazioni della mappa standard;
b) si studi la stabilità lineare dei punti di equilibrio della mappa standard in funzione del passo h.