Meccanica Razionale e Analitica
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'')^2 dx$$

nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]),\ y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 0,$$
$$\int_0^1 e^x y(x) dx = 1\}.$$

Provare che il minimo assoluto esiste e trovarlo.

Secondo Esercizio

Le carrucole rappresentate hanno tutte massa trascurabile. Al sistema sono applicati le due masse M e m come in figura. Con riferimento alle notazioni indicate, assumere x come parametro lagrangiano del sistema. Trovare X in funzione di x. Calcolare l'equazione di Lagrange del problema e risolverla con condizioni iniziali generiche. Trovare anche il rapporto M/m con cui si ha equilibrio.

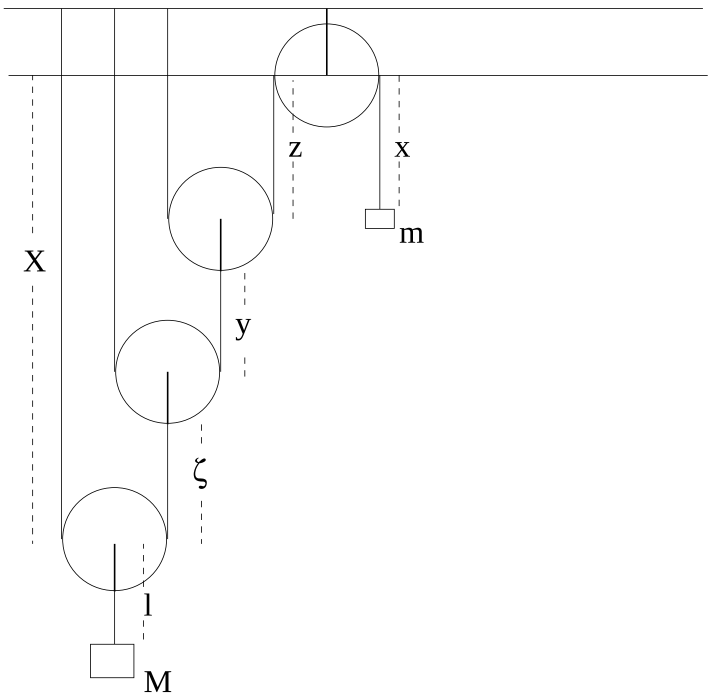

Figura 1

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta di lunghezza 3ℓ e massa trascurabile e da una lastra quadrata omogenea di lato ℓ e massa m. L'estremo A dell'asta è incernierato all'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse y verticale ascendente e l'asta è vincolata a muoversi nel piano xy. La lastra ha un lato incernierato all'asta in modo che l'estremo C dell'asta coincida con l'estremo del lato della lastra (vedi Figura 2); essa può inoltre ruotare attorno all'asta senza attriti. Il sistema è soggetto alla forza di gravità con accelerazione g.

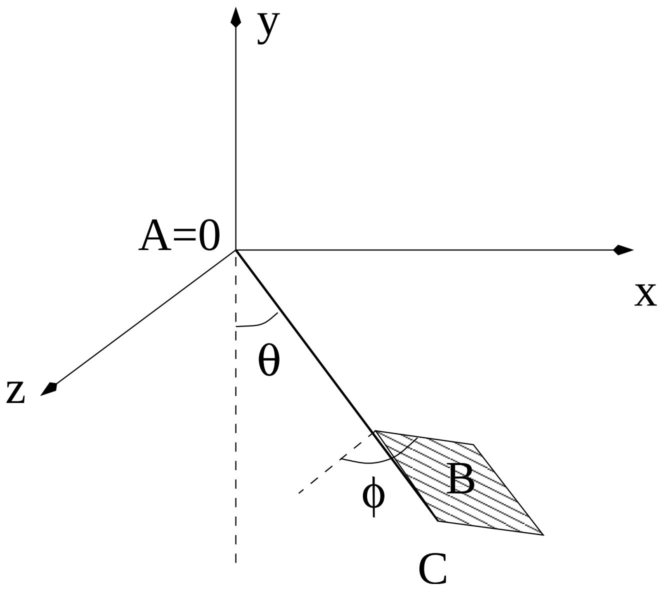

Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale e l'angolo ϕ che la lastra forma con il piano xy
a) scrivere la lagrangiana del sistema;
b) trovare un integrale primo.

Prova al Calcolatore

Calcolare la forma di Jordan J della matrice

$$A = \begin{vmatrix} -5/3 & 4/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}$$

e una matrice C tale che $A = CJC^{-1}$. Verificare che

$$e^A = Ce^J C^{-1}.$$