Compito di Meccanica Razionale e Analitica
18 Febbraio 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (1+x^2)\, y'^2\, dx$$

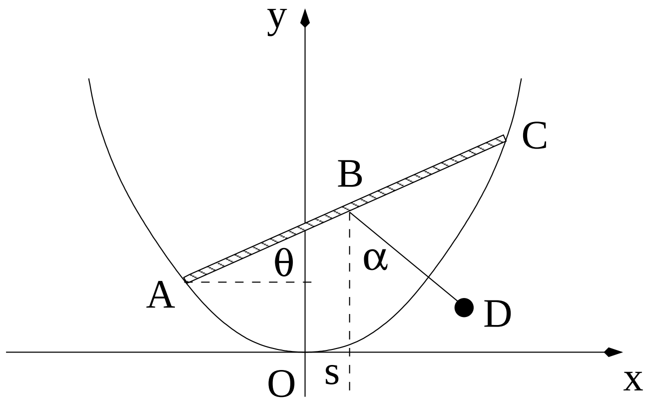
ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^2([0,1]),\, y(0) = 1,\, y(1) = 0\}$$

e trovarlo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico composto da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ con gli estremi A, C vincolati a scorrere lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2/\ell$. Al baricentro B dell'asta AC è incernierato un estremo di un'altra asta, di massa trascurabile e lunghezza ℓ, ed un punto materiale di massa m è attaccato all'altro estremo D (vedi Figura).



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto B e l'angolo α che l'asta BD forma con la direzione verticale,

i) scrivere la lagrangiana del sistema (*suggerimento:* si usi il parametro ausiliario θ indicato in figura per calcolare la posizione di A e C);

ii) trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

Terzo Esercizio

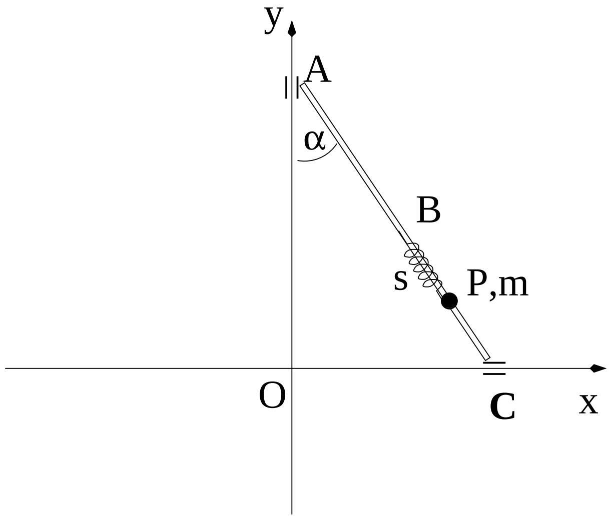
Si consideri il sistema meccanico in figura, mobile nel piano verticale Oxy e costituito da:

a) un'asta rigida omogenea AC di massa m e lunghezza 2ℓ;

b) un punto materiale P di massa m;

c) una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il baricentro B dell'asta al punto P.

L'asta AC ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo l'asse y e l'altro estremo C vincolato a scorrere lungo l'asse x; il punto P è a sua volta vincolato a scorrere lungo l'asta.



Si assumano come parametri lagrangiani l'angolo α tra l'asta e l'asse y misurato in senso antiorario $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ e l'ascissa s $(-\ell < s < \ell)$ di P sull'asta, contata rispetto al baricentro B e positiva in direzione di C.

a) Assumendo $\frac{m\,g}{k\,\ell} = \frac{1}{2}$ trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;

b) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.