Compito di Meccanica Razionale e Analitica
28 Gennaio 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + y^2)\, dx$$

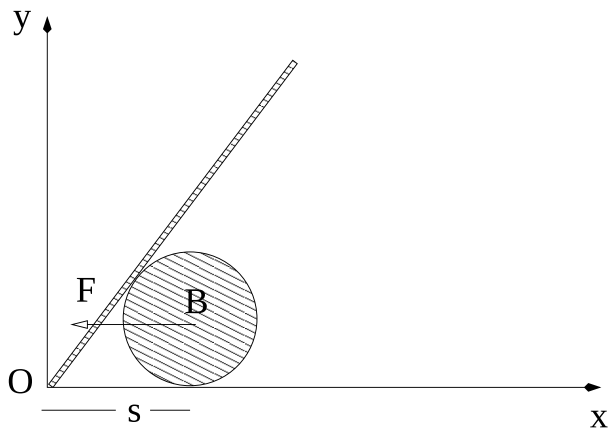
ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^2([1,2]),\ y(1) = 0,\ y(2) = 1\}$$

e trovarlo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse y verticale. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da un disco omogeneo, di massa M e raggio R, e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. Un estremo dell'asta è vincolato all'origine O del riferimento, attorno al quale l'asta può ruotare liberamente. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare lungo l'asta scivolando lungo l'asse x (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità ed una forza costante $-F\hat{\mathbf{x}}$, con $F > 0$, applicata al centro del disco B.



Utilizzando come coordinata lagrangiana l'ascissa s del centro del disco, restringendoci al caso $R < s < 2\ell$,

a) si scriva la lagrangiana del sistema;

b) si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità assumendo $2\ell = \sqrt{3}R$, $F = \frac{\sqrt{3}}{16}mg$.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico in figura, mobile nel piano verticale Oxy e costituito da:

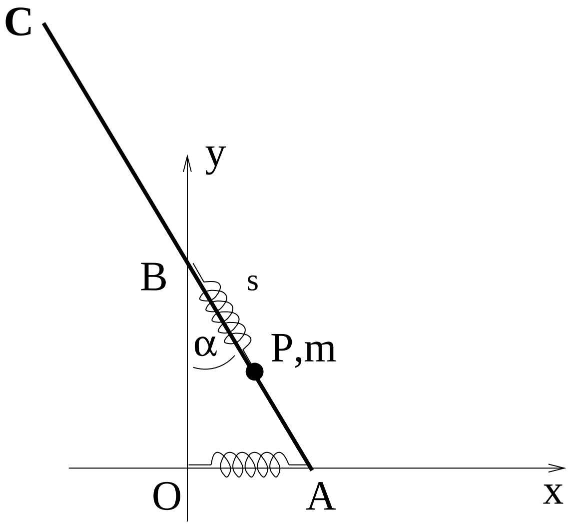
a) un'asta rigida omogenea AC di massa m e lunghezza 2ℓ;

b) un punto materiale P di massa m;

c) una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega il baricentro B dell'asta al punto P;

d) una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che collega l'origine O del sistema di riferimento al punto A dell'asta.

L'asta ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo l'asse x ed il baricentro B vincolato a scorrere lungo l'asse y; il punto P è a sua volta vincolato a scorrere lungo l'asta.



Si assumano come parametri lagrangiani l'angolo α tra l'asse y e l'asta e l'ascissa s $(-\ell < s < \ell)$ di P lungo l'asta, contata a partire dal baricentro e positiva nella direzione di A.

Assumendo che $\frac{mg}{k\ell} = \frac{1}{2}$ dimostrare che $(\alpha, s) = (\pi, -\frac{mg}{k})$ è una configurazione di equilibrio stabile e scrivere le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale configurazione.