CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

16 Novembre 2006

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità del punto di equilibrio;
(b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \gamma\frac{dx}{dt} \qquad (\gamma \geq 0)$$

dove $V(x)$ è una funzione C^2 definita su tutto $\mathbf{R}$ con le seguenti proprietà:
1) si annulla soltanto in $x = 0, 1, 2, 3$, e in ognuno di questi punti cambia segno;
2) i limiti sono $-\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$;
3) in ogni intervallo tra due zeri c'è un solo punto stazionario non degenere (con derivate seconda non nulla) $x_i \in (i-1, i)$, per $i = 1, 2, 3$, e non ce ne sono altri;
4) vale la seguente diseguaglianza: $V(x_1) > V(x_3)$.
Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$:
a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità;
b) si traccino qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia;
Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo:
c) si determini la stabilità dei punti di equilibrio per γ abbastanza piccolo;
d) si traccino qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e si tratteggino i bacini di attrazione dei pozzi.