CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

15 Gennaio 2007

Esercizio 1: Si studi il sistema gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,; \qquad \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

dove

$$U(x,y) = x\left(1 - x^2/3 - y^2 - xy\right).$$

In particolare

a) si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;

b) si determini un insieme che fa parte del bacino di attrazione del punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico discreto

$$X_{k+1} = A\,X_k \qquad X_0 \in \mathbf{R}^3$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) si discuta la stabilità del punto fisso;
b) si trovi la soluzione generale in forma esplicita.

Esercizio 3: Si consideri un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$\begin{cases} x = R\cos(q) \\ y = R\sin(q) \\ z = \alpha\, q \end{cases} \qquad R, \alpha > 0\,,$$

e soggetto alla forza costante

$$\vec{F} = m\,g \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{con } g > 0\,, \theta \in (0, \pi/2)\,.$$

Utilizzando la variabile reale q come coordinata lagrangiana
a) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange;
b) si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton; si trovino inoltre i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano in funzione dei parametri;
c) si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
d) si traccino i disegni delle orbite nei casi qualitativamente distinti.
e) Applicazione: la Torre di Pisa (esclusa la cella campanaria) sia approssimata con un cilindro di raggio $R = 10$ alto 50 metri, sporgente in fuori rispetto alla base di appoggio di 5 metri al bordo superiore, e con 7 piani uguali. Le scale salgono a spirale con un giro per piano. Se si disponesse uno scivolo lungo le scale, ci sarebbero dei punti in cui una massa rotolante sullo scivolo potrebbe restare ferma?