CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

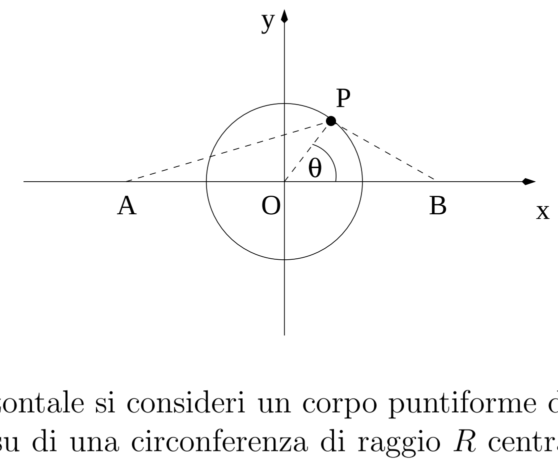
13 Febbraio 2007

Esercizio 1: Si consideri il sistema di equazioni del tipo di Volterra-Lotka

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \sigma\, x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - \sigma\, y) \end{cases} \qquad (0 < \sigma < 1)\ .$$

Tale sistema rappresenta un modello di evoluzione preda–predatore: la variabile $x \geq 0$ rappresenta il numero delle prede, la $y \geq 0$ il numero dei predatori e la crescita è limitata.
a) Si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità;
b) si trovino delle costanti $h, k > 0$ tali che il rettangolo chiuso Q individuato dalle rette $x = k,\ y = h$ e dagli assi coordinati sia positivamente invariante;
c) che cosa si può concludere sugli insiemi ω-limite delle orbite con condizione iniziale in Q?

Esercizio 2:



In un piano orizzontale si consideri un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio R centrata nell'origine O. Sul corpo agiscono due forze centrali con centri $A = (-2R, 0)$, $B = (2R, 0)$ di energia potenziale $-1/|P - A|$, $-1/|P - B|$ rispettivamente, dove P è la posizione del corpo. Utilizzando la coordinata polare θ (rispetto all'origine) come coordinata lagrangiana
a) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange;

b) si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton; si trovino inoltre i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano in funzione dei parametri;
c) si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
d) si tracci un grafico qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Dato il sistema dinamico discreto

$$X_{k+1} = A\, X_k \qquad X_0 \in \mathbf{R}^3$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) si discuta la stabilità del punto fisso;
b) si trovi la soluzione generale in forma esplicita.