CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

19 Settembre 2007

Esercizio 1: Si studi il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r-1) - ry \\ \dot{y} = xr + y(r-1) \end{cases}$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$. In particolare

a) si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;

b) si trovi la soluzione generale esplicita del sistema (*suggerimento:* si risolva il sistema corrispondente per le coordinate polari r, θ definite da $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico discreto in $\mathbf{R}^2$

$$X_{k+1} = A\,X_k + B\,; \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,; \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

con x_0, y_0, α, β parametri reali assegnati, se ne trovi la soluzione generale.

Esercizio 3: Si completi la relazione

$$w(p,q) = \arctan(p+q)$$

ad una trasformazione canonica $\mathbf{R}^2 \ni (p,q) \mapsto (w,z) \in \mathbf{R}^2$ e si utilizzi tale trasformazione per trovare la soluzione generale del sistema di equazioni di Hamilton con Hamiltoniana $H(p,q) = q[1+(p+q)^2]$.