Compito di Meccanica Razionale e Analitica
12 Settembre 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo D di massa m e raggio r vincolato a rotolare senza strisciare su una guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ tale che la guida giaccia nel piano xy e sia centrata in O. Il disco D è vincolato a mantenersi ortogonale al piano xy e la normale al disco è sempra parallela alla direzione definita dall'origine O e dal punto di contatto P tra disco e guida (vedi Figura 1).

Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OP forma con l'asse x scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange.

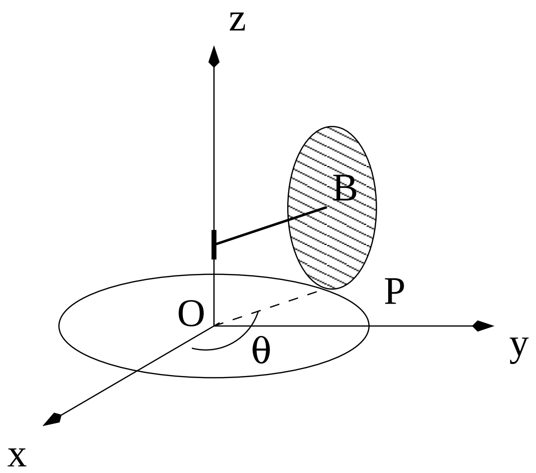

Figura 1

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei D_1, D_2 di masse M, m e raggi R, r rispettivamente. Il disco D_1 è vincolato a ruotare attorno ad un punto O in un piano orizzontale. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ tale che D_1 giaccia nel piano xy. Il disco D_2 è vincolato a mantenersi ortogonale al piano xy e la normale al disco è sempre parallela alla direzione di OP, dove P è il punto di contatto tra D_1 e D_2 (vedi Figura 2). Inoltre i due dischi rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.

Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ, ϕ, che OP ed un raggio fisso OQ di D_1 formano con l'asse x,

a) scrivere la lagrangiana del sistema;

b) trovare gli integrali primi del sistema.

Si consideri adesso il caso in cui $M = 2m$, $R = 2r$.

c) Trovare tutti i moti con $\theta(t) \equiv 0$, $\phi(t) \not\equiv 0$.

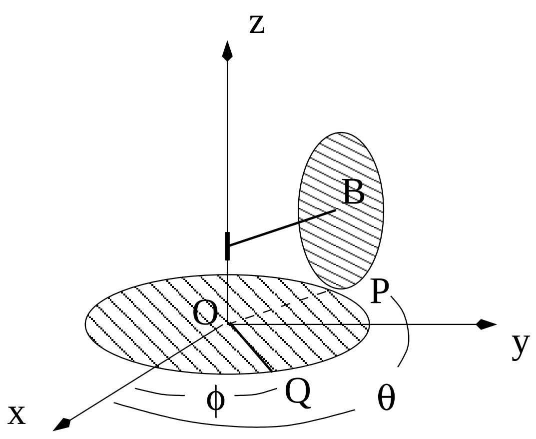

Figura 2

Terzo Esercizio

Il sistema meccanico in Figura 3, posto in un piano verticale, è costituito da:

- un asta omogenea AD di massa $3\,m$ e lunghezza $3\,\ell$ con l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse X ed il punto C, distante $2\,\ell$ da A, vincolato a scorrere sull'asse Y;
- un asta omogenea OB di massa m e lunghezza ℓ incernierata nell'origine O e nel punto B dell'asta AD a distanza ℓ da A;
- una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo A della prima asta con l'origine.

Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione costante g.

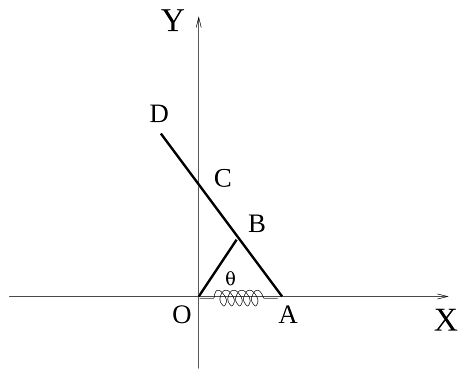

Figura 3

Prendendo come parametro lagrangiano l'angolo θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ che l'asta OB forma con l'asse X

1) trovare le posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \frac{m\,g}{k\,\ell} \neq \frac{4}{5}$;

2) nel caso $\alpha = 1$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.