Compito parziale di Meccanica Razionale e Analitica

30 Maggio 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato alla superficie parametrica Σ definita da

$$x = (2 + \cos u)\cos\theta\,; \quad y = (2 + \cos u)\sin\theta\,; \quad z = u$$

con $u \in \mathbb{R}, \theta \in S^1$. Si assuma che sul punto non agiscano forze attive e che la superficie sia liscia.

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) usare il metodo di Routh per ridurre il problema ad un solo grado di libertà e descrivere le soluzioni del problema ridotto.

iii) utilizzando il punto precedente descrivere i moti del punto P sulla superficie Σ al variare delle condizioni iniziali.

Secondo Esercizio

Un sistema meccanico, mobile in un piano verticale, è composto da un punto materiale P di massa m e da un corpo rigido formato da 3 aste omogenee AB, AC, BC incernierate in modo da formare il triangolo ABC. Le aste hanno tutte massa m e le loro lunghezze sono rispettivamente $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$.

Il vertice A del triangolo è fissato nell'origine O di un sistema di riferimento OXY, mentre P è vincolato a muoversi lungo l'asta BC; inoltre P è collegato con l'origine O da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, con accelerazione g. Detto M il punto medio di BC, si scelgano come parametri lagrangiani l'angolo θ che il segmento AM forma con l'asse Y (misurato in verso antiorario) e l'ascissa s del punto P su BC, misurata a partire da M e positiva verso il vertice C.

a) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;

b) trovare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{k}{mg}$;

c) posto $\alpha = 1$, si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.